SINGULARITÉS À L'INFINI ET INTÉGRATION MOTIVIQUE par

Michel Raibaut

SINGULARITÉS À L'INFINI ET INTÉGRATION MOTIVIQUE

par

Michel Raibaut

Résumé. — Soit k un corps de caractéristique nulle et f une fonction non constante définie sur une variété lisse. Nous définissons dans cet article une *fibre de Milnor motivique à l'infini* qui appartient à un anneau de Grothendieck des variétés. Elle est définie en termes d'une compactification choisie, non nécessairement lisse, mais est indépendante de ce choix. Lorsque k est le corps des nombres complexes, en utilisant le morphisme de réalisation de Hodge, elle se réalise en le spectre à l'infini de f. Nous la calculons par exemple, dans le cas d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini.

Pour toute valeur a, nous définissons une *fibre de Milnor motivique complète* $S_{f,a}$ qui prolonge la fibre de Milnor motivique usuelle S_{f-a}. Ceci permet d'introduire des *valeurs motiviquement atypiques*, un *ensemble de bifurcation motivique* de f et une notion de *fonction motiviquement modérée.*

Abstract. — Let k be a field of characteristic zero and f be a non constant function defined on a smooth variety. We construct in this article a *motivic Milnor fiber at infinity* which belongs to a Grothendieck ring of variety. It is defined in terms of a chosen compactification, not necessary smooth, but is shown to be independant of this choice. When k is the field of complex numbers, using the Hodge realization morphism, it realises to the spectrum at infinity of f. For instance, we compute it in the case of a Laurent polynomial non-degenerated with respect to its Newton polyhedron at infinity.

For each value a, we define a complete motivic Milnor fiber $S_{f,a}$. It's an extension of the usual motivic Milnor fiber S_{f-a}. Then we introduice *motivic atypical values*, a *motivic bifurcation set* of f and a notion of *motivically tame function.*

Table des matières

Ce travail a bénéficié d'une aide des Agence Nationales de la Recherche portant les références ANR-08-JCJC-0118-01, et ANR-06-BLAN-0183 ainsi que du Projet de Recherche G.0318.06N de la Fondation de Recherche - Flandre (FWO) .

Introduction

Soit U une variété algébrique complexe lisse et $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une application régulière non constante. Il existe un ensemble fini minimal $\mathcal{B}$, appelé *ensemble de bifurcation* tel que $f : U \setminus f^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{B}$ soit une fibration topologique localement triviale. L'ensemble des valeurs critiques de f est contenu dans l'ensemble de bifurcation, mais l'inclusion peut être stricte. Par exemple le polynôme $x(xy-1)$ considéré par Broughton [**4**] est une fonction lisse sur $\mathbb{C}^2$ et toutes ses fibres sont connexes exceptée celle en 0. Les valeurs de bifurcation non critiques sont dues à des "singularités à l'infini". Hà et Lê [**45**] donnent une description complète de l'ensemble de bifurcation dans le cas des courbes. Précisément, une valeur a est de bifurcation si et seulement si la caractéristique d'Euler de sa fibre diffère de la caractéristique d'Euler de la fibre générique. En dimension quelconque le problème est ouvert, voir Broughton [**4**], Cassou-Noguès et Dimca [**6**], Némethi et Zaharia [**28**], Parusiński [**30**], Tibăr [**41**] et [**42**], et Zaharia [**46**].

De nombreuses définitions de bon comportement à l'infini ont été introduites pour les fonctions polynomiales. Broughton [**4**] définit les polynômes modérés, généralisés ensuite par Némethi et Zaharia [**29**] en les polynômes M-modérés, puis en les polynômes sans singularités à l'infini par Siersma et Tibăr [**39**]. Pour une large classe de polynômes contenant ceux cités ci-dessus, il existe une connexion forte entre les propriétés des singularités isolées et les propriétés de ces polynômes. La fibre générique de la fibration a par exemple, comme pour les singularités isolées, le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $\dim U - 1$. Parusiński [**31**] et Sabbah [**36**] ont enfin introduit la classe des *polynômes cohomologiquement modérés* pour traîter des questions cohomologiques sur $\mathbb{Q}$. Les différentes classes introduites ci-dessus ne se contiennent pas entre elles et on appelle *polynôme faiblement modéré* l'un de leurs éléments [**27**].

Les espaces de cohomologie à support compact $H^*_c\left(f^{-1}(t), \mathbb{Q}\right)$ de la fibre en t sont munis d'une structure de Hodge mixte naturelle [**8**]. Steenbrink et Zucker [**40**] puis M. Saito [**38**] ont montré comment construire une *structure de Hodge mixte limite* lorsque t tend vers l'infini. Sabbah [**35**] l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. En particulier si $(X, i, \hat{f})$ est une compactification lisse de f, et $1/\hat{f}$ prolonge $1/f$, la structure de Hodge mixte limite sur $H^k_c(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$ s'identifie alors à la structure de Hodge mixte du i-ème groupe d'hypercohomologie à support compact $\mathbb{H}^k_c(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\underline{\mathbb{Q}}_U))$ de la fibre à l'infini, à coefficients dans le faisceau des cycles proches de $1/\hat{f}$ évalué sur l'extension par 0 du faisceau constant sur U. On pourra consulter [**35**, (5.5)]. Le spectre de cette structure limite est un invariant du polynôme f appelé *spectre à l'infini*, il a notamment été étudié (souvent pour la cohomologie sans support) par Brélivet [**2**] et [**3**], Dimca [**12**], García-López et Némethi [**14**], [**16**] et [**15**], Némethi et Sabbah [**27**] et Sabbah [**35**] et [**37**].

Considérons maintenant une fonction $g : X \to \mathbb{A}^1$ définie sur une variété algébrique lisse. Soit x un point fermé de $g^{-1}(0)$. En utilisant l'intégration motivique, Denef et Loeser [**9**] [**11**] introduisent la *fibre de Milnor motivique* $S_{g,x}$. Cet objet appartient à un anneau de Grothendieck des variétés virtuelles munies d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Il se réalise, dans l'anneau de Grothendieck des structures de Hodge noté $K_0(SH^{mon})$, en la classe de la structure de Hodge mixte limite de la fibre de Milnor de g en x. Il permet en particulier de retrouver le spectre de Hodge-Steenbrink $Sp(g,x)$ [**9**].

Pour tout ouvert U de X, Bittner [**1**] grâce au théorème de factorisation faible, puis Guibert, Loeser et Merle [**19**] à l'aide d'arcs raisonnablement tangents au fermé complémentaire, construisent $\mathcal{S}_{g,U}$, un analogue motivique du faisceau $\Psi_g(Ri_!\underline{\mathbb{Q}}_U)$. Ils étendent ainsi la fibre de Milnor motivique en un morphisme additif défini sur tout l'anneau de Grothendieck. Dans la partie 1, nous rappelerons cela et nous fixerons les notations utilisées par la suite.

Ainsi, pour un morphisme $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ à source lisse, en considérant U comme ouvert dans une compactification, nous définissons dans la partie 2 une *fibre de Milnor motivique à l'infini* $\mathcal{S}_{f,\infty}$. Cet objet est un nouvel invariant de f qui ne dépend d'aucune compactification et se réalise dans l'anneau $K_0(SH^{mon})$ en la classe de la structure de Hodge mixte à l'infini. En particulier cette variété virtuelle munie d'une action de $\mathbb{G}_m$ permet de retrouver le spectre à l'infini de f.

Pour une fonction polynomiale f s'annulant en 0 et non dégénérée pour son polyèdre de Newton Γ en 0, Guibert **[17]** calcule la fibre de Milnor motivique de f au point 0, en termes du polyèdre Γ . Ce calcul se fait sans résolution des singularités et est valable sur tout corps de caractéristique 0. Dans la partie 3, pour f un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini Γ, nous calculons de manière similaire, la fibre de Milnor motivique de f à l'infini, en termes de Γ. Nous obtenons ainsi, une décomposition du spectre à l'infini de f en termes de spectres de variétés quasi-homogènes. Ces résultats étaient annoncés dans **[34]**.

Enfin dans la partie 4, nous définissons pour toute valeur a, une *fibre de Milnor motivique "complète"* $\mathcal{S}_{f,a}$ qui ne dépend pas de la compactification et qui prolonge la fibre de Milnor motivique classique $\mathcal{S}_{f-a}$. En particulier dans le cas d'un polynôme homogène, $\mathcal{S}_{f,0}$ et $\mathcal{S}_{f,\infty}$ s'échangent par une inversion. Ceci nous permet de définir des cycles évanescents motiviques à l'infini et un *ensemble de bifurcation motivique* contenu dans un discriminant universel, obtenu en considérant toutes les compactifications et leurs log-résolutions. En particulier, nous dirons qu'une fonction est *motiviquement modérée* si et seulement si elle n'a pas de cycles évanescents motiviques à l'infini. Cette propriété est un analogue motivique de la notion de polynôme cohomologiquement modéré. Dans ce cas là l'ensemble de bifurcation motivique est égal au discriminant du polynôme. Nous montrons par exemple, qu'un polynôme commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini est motiviquement modéré.

Signalons les travaux en cours de Kiyoshi Takeuchi et Yutaka Matsui **[26]** et **[25]**. Les auteurs introduisent une fibre de Milnor motivique à l'infini à l'aide de résolutions des singularités, sans prouver toutefois l'indépendance de l'objet vis à vis de la compactification. Dans le cas d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini, ils décrivent les blocs de Jordan de la monodromie à l'infini en termes du polyèdre de Newton.

L'auteur tient à remercier les professeurs Johannes Nicaise et Wim Veys pour leur invitation pendant l'automne 2010 au département de mathématiques de l'université de Leuven où cet article a été rédigé.

L'auteur tient particulièrement à remercier Michel Merle, pour l'avoir intéressé aux questions ci-dessus, pour ses conseils et enfin pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail au cours de sa réalisation.

1. Fibre de Milnor motivique

Dans cette partie nous présentons les outils utilisés par la suite. On pourra se référer aux articles **[11]**, **[23]**, **[24]** puis **[19]** et **[18]**.

1.1. Anneaux de Grothendieck. —

1.1.1. Variétés. — Dans tout ce qui suit, k est un corps de caractéristique 0 et $\mathbb{G}_m$ est son groupe multiplicatif. On appelle *k-variété*, un schéma séparé réduit de type fini sur k. Si X

est un schéma, on notera $|X|$ ou X_{red} le schéma réduit associé. On note Var_k la catégorie des k-variétés et pour une k-variété S on note Var_S la catégorie des S-variétés, c'est à dire des morphismes $X \to S$. Soit G un groupe algébrique, et X une variété sur laquelle G agit. L'action est dite *bonne*, si toute $G-$orbite est contenue dans un ouvert affine de X.

Soit X une variété sur k, et $p : A \to X$ un fibré affine pour la topologie de Zariski. Les fibres de p sont des espaces affines et les morphismes de transition entre les cartes sont des applications affines. Soit G un groupe algébrique linéaire. Une bonne action de G sur A est dite *affine* si et seulement si elle relève une bonne action de G sur X et sa restriction à toutes les fibres est affine. Dans toute la suite nous supposerons les actions bonnes.

1.1.2. Anneaux de Grothendieck. — Soit S une k-variété munie de l'action triviale et X une S-variété munie d'une bonne action de $\mathbb{G}_m$ notée σ. Un morphisme $\pi : X \to \mathbb{G}_m$ est dit *homogène* de poids n, si $\pi(\sigma(\lambda, x))$ est égal à $\lambda^n \pi(x)$ pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et pour tout x dans X. Pour un entier n strictement positif, notons $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ la catégorie des variétés $X \to S \times \mathbb{G}_m$ munies d'une bonne action de $\mathbb{G}_m$, telle que les fibres de la projection sur S soient $\mathbb{G}_m$-invariantes et la projection sur $\mathbb{G}_m$ soit homogène de poids n.

Définition 1.1. — Pour tout entier n strictement positif, l'*anneau de Grothendieck* noté $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})$ est défini dans [**19**, 2.5, 2.7] et [**18**, 2.2] comme le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes des variétés $(X \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma)$ de la catégorie $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$, modulo les relations :

1. $$[X \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X' \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma] + [X \setminus X' \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma]$$
   pour X' un fermé de X invariant sous $\mathbb{G}_m$,
2. $$[X \times \mathbb{A}_k^n \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X \times \mathbb{A}_k^n \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma']$$
   lorsque σ et σ' sont deux actions qui relèvent la même $\mathbb{G}_m$-action sur X en actions affines sur le fibré
3. $$[X \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X \to S \times \mathbb{G}_m, \sigma_l]$$
   où $\sigma_l(\lambda, x)$ est égal à $\sigma(\lambda^l, x)$ pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, pour tout x dans X et pour tout entier l strictement positif.

Pour tout entier n strictement positif, le produit fibré au dessus de $S \times \mathbb{G}_m$ muni de l'action diagonale, induit naturellement un produit dans la catégorie $Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ et une structure d'anneau sur le groupe $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})$. L'élément unité pour le produit, noté $1_{S\times\mathbb{G}_m}$, est la classe du morphisme identité sur $S \times \mathbb{G}_m$ où $\mathbb{G}_m$ agit trivialement sur S et par translation sur lui même. En particulier, l'anneau $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})$ a une structure de $K_0(Var_k)$-module.

1.1.3. Localisation. — Pour tout entier n strictement positif, dans l'anneau $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})$ on note $\mathbb{L}$ la classe $[\mathbb{A}_k^1 \times S \times \mathbb{G}_m, \pi_{S\times\mathbb{G}_m}, \tau_n]$ où $\pi_{S\times\mathbb{G}_m}$ est la projection sur $S \times \mathbb{G}_m$ et $\tau_n(\lambda, (a, x, \mu))$ est égal à $(a, x, \lambda^n \mu)$, pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et (a, x, μ) dans $\mathbb{A}_k^1 \times S \times \mathbb{G}_m$. On note alors $\mathcal{M}_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n}$ l'anneau localisé $K_0(Var_{S\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m,n})[\mathbb{L}^{-1}]$.

1.1.4. Image directe, image inverse. — Soit $f : S \to S'$ un morphisme de variétés. La composition par f fournit le morphisme *image directe* $f_! : \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m} \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S'\times\mathbb{G}_m}$. Le produit fibré au dessus de S' fournit le morphisme *image inverse* $f^{-1} : \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S'\times\mathbb{G}_m} \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$. On peut définir ces morphismes au niveau du K_0.

1.1.5. Limite inductive. — Les catégories $Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$ et les anneaux $K_0(Var^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m})$ et $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m,n}_{S\times\mathbb{G}_m}$ forment un système inductif induit par l'ordre partiel donné par la divisibilité entre les entiers. On note alors $Var^{\mathbb{G}_m}_{S\times\mathbb{G}_m}$, $K_0(Var^{\mathbb{G}_m}_{S\times\mathbb{G}_m})$ et $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{S\times\mathbb{G}_m}$ les colimites.

1.1.6. Séries rationnelles. — Soit A l'un des anneaux $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1}]$, $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1},(1/(1-\mathbb{L}^{-i}))_{i>0}]$ et $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{S\times\mathbb{G}_m}$. On note $A[[T]]_{sr}$ le sous A-module de $A[[T]]$ engendré par 1 et par un produit fini de termes $\mathbb{L}^eT^i/(1-\mathbb{L}^eT^i)$ notés $p_{e,i}(T)$ avec e dans $\mathbb{Z}$ et i dans $\mathbb{N}_{>0}$. Il existe un unique morphisme A-linéaire $\lim_{T\to\infty} : A[[T]]_{sr} \to A$ tel que pour toute famille $(e_i,j_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_{>0}$ avec I fini ou vide, $\lim_{T\to\infty}(\prod_{i\in I} p_{e_i,j_i}(T))$ vaut $(-1)^{|I|}$.

1.1.7. Cône convexe polyédral. — Soit I un ensemble fini. Un *cône convexe polyédral rationnel* de $\mathbb{R}^{*|I|}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^{*|I|}$ définie par un nombre fini d'inégalités linéaires à coefficients entiers du type $a \leq 0$ et $b > 0$ et stable sous la multiplication de $\mathbb{R}_{>0}$.

1.1.8. Lemme de rationnalité. — Le lemme suivant est bien connu, on peut se référer à [**17**, 2.1.5] et [**19**, 2.9].

Lemme 1.2. — *Soit I un ensemble fini. Soit Δ un cône polyédral rationnel convexe dans $\mathbb{R}^I_{>0}$. On note $\overline{\Delta}$ l'adhérence de Δ dans $\mathbb{R}^I_{\geq 0}$. Soit l et ν deux formes linéaires sur $\mathbb{Z}^I$, supposons l strictement positive et ν positive sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$. Dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{L},\mathbb{L}^{-1}][[T]]$ notons $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ les séries $\sum_{k\in\Delta\cap\mathbb{N}^I_{>0}} T^{l(k)}\mathbb{L}^{-\nu(k)}$. Lorsque Δ est ouvert dans son propre espace vectoriel engendré et $\overline{\Delta}$ est engendré par une famille de vecteurs que l'on peut compléter en une $\mathbb{Z}-$base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^I$, les séries $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ sont rationnelles et leur limite* $\lim_{T\to\infty} S_{\Delta,l,\nu}(T)$ *est égale à $(-1)^{dim(\Delta)}$. Dans le cas général, par additivité par rapport à l'union disjointe des cônes, grâce à l'hypothèse de positivité, les séries $S_{\Delta,l,\nu}(T)$ sont rationnelles et leur limite est égale à la caractéristique d'Euler à support compact du cône Δ .*

Notons que dans [**19**, 2.9], les formes linéaires l et ν sont supposées strictement positives sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$, mais la même preuve permet de supposer seulement l strictement positive sur $\overline{\Delta}\setminus\{0\}$.

1.2. Arcs. —

1.2.1. Espaces d'arcs. — Soit X une k-variété. On note $\mathcal{L}_n(X)$ l'*espace des n-jets*. Cet objet est un k-schéma dont les K-points rationnels, sont les morphismes $Spec\, K[t]/t^{n+1} \to X$, pour tout corps K contenant k. Il existe des morphismes canoniques $\mathcal{L}_{n+1}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$. Ces morphismes sont des fibrés en $\mathbb{A}^d_k$ quand X est lisse de dimension pure d. L'*espace des arcs* noté $\mathcal{L}(X)$ est la limite projective de ce système. On note $\pi_n : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$ les morphismes canoniques.

1.2.2. Action et coefficient angulaire. — Le groupe $\mathbb{G}_m$ agit canoniquement sur $\mathcal{L}_n(X)$ et sur $\mathcal{L}(X)$ par $\lambda.\varphi(t)$ égal à $\varphi(\lambda t)$. Dans toute la suite de l'article on note σ cette *action*.

Pour un élément φ de $K[[t]]$ ou de $K[t]/t^{n+1}$, on désigne par $\mathrm{ord}_t(\varphi)$ la valuation de φ et par $\mathrm{ac}(\varphi)$ son premier coefficient non nul. Par convention $\mathrm{ac}(0)$ est nul. Le scalaire $\mathrm{ac}(\varphi)$ est appelé *coefficient angulaire* de φ.

1.2.3. Ordre de contact. — Soit X une variété et F un fermé de X. On note $\mathcal{I}_F$ l'idéal des fonctions s'annulant sur F. On désigne par $\mathrm{ord}_t F$ la fonction qui a tout arc φ dans $\mathcal{L}(X)$ associe la borne inférieure $\inf \mathrm{ord}_t g(\varphi)$ où g parcourt les sections locales de $\mathcal{I}_F$ en l'origine de φ.

1.3. Le morphisme fibre de Milnor motivique. — Considérons X une variété et un morphisme $f : X \to \mathbb{A}^1_k$. Grâce au théorème de factorisation faible, Bittner [**1**] étend la fibre de Milnor motivique en un morphisme défini sur tout l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}_X$. Guibert, Loeser et Merle [**19**] donnent une construction différente basée sur l'intégration motivique. Nous l'expliquons ci-dessous et nous l'utiliserons par la suite.

Définition 1.3. — Pour une variété X lisse de dimension d, U un ouvert partout dense de X et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme, on considère pour deux entiers n et γ strictement positifs, l'espace d'arcs

$$\mathscr{X}_n^\gamma(f) := \{\varphi \in \mathcal{L}(X) \mid ord_t f(\varphi) = n, \mathrm{ord}_t F.\varphi \leq n\gamma\}$$

muni de la flèche "origine, coefficient angulaire" notée $(\pi_0, \mathrm{ac}(f))$ vers $X_0(f) \times \mathbb{G}_m$ et de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs. On considère ensuite la fonction zêta modifiée

$$Z^\gamma_{f,U}(T) := \sum_{n \geq 1} \mu(\mathscr{X}_n^\gamma(f)) T^n \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}[[T]].$$

On dispose du théorème de rationalité à la Denef-Loeser démontré en [**19**, 3.8]

Proposition 1.4. — *Soit U un ouvert dense d'une variété X lisse et de dimension pure d. Soit $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Il existe un entier γ_0 tel que pour tout entier γ supérieur à γ_0, les séries $Z^\gamma_{f,U}(T)$ sont rationnelles et leur limite est indépendante de γ. On désignera par $\mathcal{S}_{f,U}$ la limite $-\lim_{T\to\infty} Z^\gamma_{f,U}(T)$. De plus si $X_0(f)$ est nulle part dense dans X, et $h : Y \to X$ est une log-résolution de $(X, F \cup X_0(f))$ on dispose alors d'une formule d'image directe*

$$S_{f,U} = h_!(S_{f\circ h, h^{-1}(U)}) \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}.$$

Bittner, puis Guibert, Loeser et Merle prouvent alors le théorème d'extension à tout le groupe de Grothendieck ([**1**], [**19**, 3.9]) :

Théorème 1.5. — *Soit X une variété et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Il existe un unique morphisme de groupe $\mathcal{M}_k$-linéaire $\mathcal{S}_f : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}$ tel que pour tout morphisme propre $p : Z \to X$ avec Z lisse, et pour toute partie U ouverte et dense dans Z, $\mathcal{S}_f([p : U \to X])$ vaut $p_!(S_{f\circ p,U})$.*

Remarque 1.6. — Soit X une variété, U un ouvert partout dense, F son complémentaire et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Si f est lisse sur X alors $\mathcal{S}_f(X)$ est égal à la classe $[X_0(f) \times \mathbb{G}_m, id, \tau]$ où τ est la translation. Si F un fermé lisse de X, l'injection $i : F \to X$ est propre donc l'image $\mathcal{S}_f([i : F \to X])$ est égale à $i_!\mathcal{S}_{f\circ i}(F)$ c'est à dire à $i_!\mathcal{S}_{f_{|F}}$. Par additivité, le résultat est vrai pour tout fermé de X. Par conséquent, si f est lisse sur X et en restriction au fermé F alors $S_f(U)$ vaut $[U \cap X_0(f) \times \mathbb{G}_m, id, \tau]$ où τ est la translation.

Définition 1.7. — Considérons X une variété de dimension d et $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ un morphisme. Par la remarque précédente, pour U un ouvert de X, on appelle *cycles proches motiviques* l'objet $S_f(U)$ et *cycles évanescents motiviques* l'objet

$$S^\Phi_f(U) := (-1)^{d-1}(S_f(U) - [U \cap X_0(f) \times \mathbb{G}_m, id, \tau]).$$

Ce sont des éléments de l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m}$.

1.4. Réalisations. — On se référera à [**11**], [**19**, 3.16, 6.1] et [**32**]. On suppose ici k égal à $\mathbb{C}$.

1.4.1. Réalisation de Hodge. — On notera SH la catégorie abélienne des structures de Hodge et $K_0(SH)$ son anneau de Grothendieck correspondant. Rappelons qu'une structure de Hodge mixte admet une classe canonique dans l'anneau $K_0(SH)$. Il existe un morphisme canonique

$$\chi_h : \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \to K_0(SH)$$

qui associe à la classe d'une variété X, l'élément $\sum_i (-1)^i [H^i_c(X,\mathbb{Q})]$ dans $K_0(SH)$.

On notera SH^{mon} la catégorie abélienne des structures de Hodge munies d'un endomorphisme quasi-unipotent et $K_0(SH^{mon})$ son anneau de Grothendieck. Il existe un morphisme canonique

$$\chi_h : \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m} \to K_0(SH^{mon})$$

défini comme suit. Si $[X]$ est la classe de $f : X \to \mathbb{G}_m$ dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}$ avec X connexe, et f homogène par rapport à l'action σ de $\mathbb{G}_m$, alors f est une fibration localement triviale pour la topologie complexe. De plus si le poids est n alors pour tout x dans X, $t \mapsto \sigma(exp(2i\pi t/n), x)$ est une monodromie géométrique d'ordre fini autour de l'origine. La fibre de f en 1 que l'on note X_1 est munie d'un automorphisme d'ordre fini T_f, et on pose

$$\chi_h([f : X \to \mathbb{G}_m, \sigma]) := \left(\sum_i (-1)^i [H^i_c(X_1,\mathbb{Q})], T_f \right).$$

Il existe une application linéaire appelée *spectre de Hodge*

$$\begin{array}{ccccccc} sph & : & K_0(SH^{mon}) & \to & \mathbb{Z}[\mathbb{Q}] & := & \cup_{n\geq 1}\mathbb{Z}[t^{1/n}, t^{-1/n}] \\ & & [H] & \mapsto & sph([H]) & := & \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} t^{\alpha}(\sum_{p,q\in\mathbb{Z}} \dim H^{(p,q)}_{\alpha} t^p) \end{array}$$

où $H^{p,q}_\alpha$ est l'espace caractéristique de $H^{p,q}$ par rapport à la valeur propre $e^{2i\pi\alpha}$, pour une structure de Hodge munie d'un endomorphisme quasi-unipotent H. On note alors Sp la composée $sph \circ \chi_h$.

1.4.2. Réalisation au niveau des modules de Hodge mixtes. — On peut se référer au chapitre 14 de [**32**]. Pour toute variété algébrique complexe X, on note MHM_X la catégorie abélienne des *modules de Hodge mixtes* sur X et l'on note $K_0(MHM_X)$ l'anneau de Grothendieck correspondant. Nous considérerons aussi MHM_X^{mon} la catégorie abélienne des modules de Hodge mixtes sur X munis d'un automorphisme d'ordre fini et $K_0(MHM_X^{mon})$ son anneau de Grothendieck correspondant.

1.4.2.1. Lien avec les faisceaux pervers. — Par définition des modules de Hodge mixtes, il existe un foncteur pleinement fidèle $rat_X : D^b(MHM(X)) \to D^b_c(X,\mathbb{Q})$ tel que la catégorie $MHM(X)$ corresponde à la catégorie $Perv(X,\mathbb{Q})$. Pour tout module de Hodge mixte M sur X, on appelle $rat_X M$ son faisceau pervers rationnel sous jacent. On pourra consulter l'axiome A [**32**, 14.1].

1.4.2.2. Lien avec les structures de Hodge mixtes. — Il existe un morphisme canonique entre les catégories $MHM^{mon}_{Spec\mathbb{C}}$ et SH^{mon}. On notera alors $\Phi : K_0(MHM^{mon}_{Spec\mathbb{C}}) \to K_0(SH^{mon})$ le morphisme d'anneaux induit. On pourra consulter l'axiome B de [**32**, 14.1, 14.61].

1.4.2.3. Réalisation au niveau des modules de Hodge mixtes. — Il existe un morphisme de réalisation entre les variétés et les modules de Hodge mixtes

$$H : K_0(Var_X) \to K_0(MHM_X)$$

En effet, par additivité, il existe un unique morphisme d'anneaux H tel que pour tout $p : Z \to X$ avec Z lisse, $H([p : Z \to X])$ est la classe de l'image directe à support compact $Rp_!(\mathbf{Q}_Z)$ dans $K_0(MHM_X)$ avec $\mathbf{Q}_Z$ le module de Hodge trivial sur Z. L'image de la classe $\mathbb{L}$ est égale à la classe $[\mathbf{Q}_X(-1)]$. Par conséquent ce morphisme s'étend en un morphisme $\mathcal{M}_k$-linéaire

$$H : \mathcal{M}_X \to K_0(MHM_X)$$

avec $K_0(MHM_X)$ vu comme un $\mathcal{M}_k$-module via sa structure de $K_0(MHM_{Spec\mathbb{C}})$-module, et la réalisation de Hodge $H : \mathcal{M}_k \to K_0(MHM_{Spec\mathbb{C}})$. Il existe de même un morphisme naturel compatible dans le cas équivariant (voir [**19**, 2.6, 3.16])

$$H : \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \to K_0(MHM_X^{mon}).$$

Notons que la composée des morphismes Φ et H redonne les morphismes d'anneaux χ_h.

1.4.2.4. Cycles proches. — Soit $f : X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une fonction. Dans [**38**] M.Saito construit un *foncteur cycles proches* Ψ_f et un *foncteur cycles évanescents* Φ_f de la catégorie MHM_X vers la catégorie $MHM^{\mathrm{mon}}_{X_0(f)}$ tel que $rat_X\Psi_f(\mathbf{Q}_X)$ et $rat_X\Phi_f(\mathbf{Q}_X)$ les faisceaux pervers sous jacents soient égaux à $\psi_f(\mathbb{Q}_X)[-1]$ et $\phi_f(\mathbb{Q}_X)[-1]$. On dispose alors du morphisme cycles proches

$$\Psi_f : K_0(MHM_X) \to K_0(MHM^{\mathrm{mon}}_{X_0(f)}).$$

1.4.2.5. Compatibilité entre la fibre de Milnor motivique et le foncteur cycles proches. — Denef et Loeser [**9**, 4.2.1], puis Guibert, Loeser et Merle [**19**, 3.17] montrent le théorème de compatibilité entre la fibre de Milnor motivique et le morphisme cycles proches, modulo la réalisation de Hodge :

Théorème 1.8. — *Le diagramme commutatif suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_X \arrow[r, "S_f"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_0(f)\times\mathbb{G}_m} \arrow[d, "H"] \\
K_0(MHM_X) \arrow[r, "\Psi_f"] & K_0(MHM^{mon}_{X_0(f)})
\end{tikzcd}$$

Par composition avec le morphisme rat_X, on obtient un morphisme $\mathcal{M}_X \to K_0(Perv^{mon}_{X_0})$ tel que $\mathcal{S}_f(X)$ et $\mathcal{S}^{\phi}_f(X)$ se réalisent en la classe $[\psi_f(\mathbb{Q}_X)[-1]]$ et $[\phi_f(\mathbb{Q}_X)[-1]]$ et pour tout ouvert U lisse de X, $\mathcal{S}_f(U)$ et $\mathcal{S}^{\phi}_f(U)$ se réalisent en la classe $[\psi_f(Ri_!\mathbb{Q}_U)[-1]]$ et $[\phi_f(Ri_!\mathbb{Q}_U)[-1]]$ où i est l'injection de U dans X.

2. Fibre de Milnor motivique à l'infini

Soit k un corps de caractéristique 0, soit U une variété algébrique lisse sur k et $f : U \to \mathbb{A}^1_k$ une application régulière.

On considère $j : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ l'injection qui a un élément a associe $[1 : a]$. On désignera par ∞ l'élément $[0 : 1]$ et on notera par abus a l'élément $[1 : a]$.

2.1. Compactification. —

On appelle *compactification* de f la donnée d'une variété X, d'une immersion ouverte dominante i et d'une application propre $\hat{f}$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "\hat{f}"] \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[r, "j"] & \mathbb{P}^1_k. \end{tikzcd}$$

L'existence d'une compactification est assurée par un théorème de Nagata, on peut par exemple se référer à [**7**].

2.1.1. Notations. — Pour une compactification $(X, i, \hat{f})$ on note U_X l'ouvert $i(U)$, U_X^* l'ouvert $i(U) \setminus i(f^{-1}(0))$, F_X le fermé à l'infini $X \setminus U_X$ et X_a la fibre $\hat{f}^{-1}(a)$ pour tout a dans $\mathbb{P}^1_k$. On notera enfin par abus $1/\hat{f}$ l'application régulière définie sur $X \setminus X_0$ qui prolonge $1/f$.

2.1.2. Compactifications lisses. — Soit $(X, i, \hat{f})$ une compactification. L'ouvert U est lisse et i est une immersion ouverte, le lieu singulier X_{sing} est donc contenu dans le fermé à l'infini F_X. De plus, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka [**20**], on peut déduire de $(X, i, \hat{f})$ une compactification (Z, i_Z, f_Z) lisse où Z est birationnellement équivalente à X. On considère pour cela (Z, E, h) une log-résolution de (X, X_{sing}). La variété Z est lisse, l'ouvert $i(U)$ est inclus dans $X \backslash X_{Sing}$, donc h est inversible sur $i(U)$, le morphisme $h^{-1} \circ i$ est une immersion ouverte, comme composée d'immersions ouvertes, l'ouvert $i(U)$ est dense et h est un homéomorphisme de $Z \backslash E$ dans $X \backslash X_{Sing}$, donc $h^{-1}(i(U))$ est un ouvert dense dans $Z \backslash E$ donc dans Z. Le morphisme $\hat{f} \circ h$ est propre comme composée d'applications propres. Enfin la composée $(\hat{f} \circ h) \circ (h^{-1} \circ i)$ est égale à $\hat{f} \circ i$ elle même égale à $j \circ f$.

2.2. Fibre de Milnor à l'infini. —

On suppose dans cette sous section k égal à $\mathbb{C}$.

2.2.1. Fibre de Milnor à l'infini et ensemble de bifurcation. — Le théorème suivant est un corollaire bien connu de l'existence de stratifications de Whitney et du théorème de fibration de Thom-Mather [**33**], [**43**] et [**44**].

Théorème 2.1. — *Pour toute variété algébrique complexe lisse U, pour toute application régulière $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, il existe un ensemble fini minimal $\mathcal{B}$, appelé* ensemble de bifurcation *tel que $f : U \setminus f^{-1}(\mathcal{B}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{B}$ soit une fibration topologique localement triviale. En particulier, il existe $R > 0$ tel que $f : U \setminus f^{-1}(\overline{D}(0, R)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0, R)$ est une fibration topologique localement triviale. On appelle* fibre de Milnor à l'infini *la fibre générique de cette dernière fibration.*

L'ensemble de bifurcation contient les valeurs critiques du morphisme f. Néanmoins l'inclusion peut-être stricte. On peut considérer l'exemple de Broughton [**4**], $x(xy - 1)$: cette fonction est lisse sur $\mathbb{C}^2$ et toutes les fibres sont lisses et connexes exceptée la fibre en 0. On appelle *valeur atypique* toute valeur de bifurcation non contenue dans le discriminant. Nous définirons dans la partie 4 des *valeurs motiviquement atypiques* et un *ensemble de bifurcation motivique.*

2.2.2. Structure de Hodge mixte limite. — Pour tout t, les espaces de cohomologie à support compact $H_c^*\left(f^{-1}(t), \mathbb{Q}\right)$ de la fibre en t sont munis d'une structure de Hodge mixte naturelle [**8**]. Ces structures de Hodge mixtes sont les fibres d'une variation de structures de Hodge mixtes sur le complémentaire de l'union $\mathcal{B} \cup \{\infty\}$ dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Steenbrink et Zucker [**40**] puis M. Saito [**38**] ont montré comment construire une *structure de Hodge mixte limite* lorsque t tend vers l'infini ou vers une valeur de bifurcation. Sabbah **[35]** l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. Une bonne référence pour cela est **[32]**.

En particulier cette structure de Hodge mixte peut être obtenue de la manière suivante. Soit $(X, i, \hat{f})$ une compactification lisse et $\Psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbf{Q}_U)$ le module de Hodge mixte sur le faisceau des cycles proches en $t = \infty$ et évalué sur le module $Ri_!\mathbf{Q}_U$. La structure de Hodge mixte limite sur $H_c^k(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$ s'identifie à la structure de Hodge mixte de $\mathbb{H}_c^k(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\underline{\mathbb{Q}}_U))$ **[35**, 5.5**]**. On obtient ce groupe d'hypercohomologie en prenant le faisceau pervers sous jacent du module de Hodge mixte $Rp_!(\Psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbf{Q}_U))$ où $Rp_!$ est l'image directe sur le point (voir 1.4.2.1).

Le spectre de cette structure limite est un invariant de f appelé *spectre à l'infini* (voir le paragraphe 1.4.1). Il a notamment été étudié (souvent pour la cohomologie sans support) par Brélivet **[2]** et **[3]**, Dimca **[12]**, Garcia-Lopez et Némethi **[14]**, **[16]** et **[15]**, Némethi et Sabbah **[27]** et Sabbah **[35]** et **[37]**.

Remarque 2.2. — La monodromie naturelle du foncteur des cycles proches $\psi_{1/\hat{f}}$ est l'inverse de la monodromie le long d'un grand cercle orienté positivement dans $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ voir (1.9) **[35]**.

2.3. Fibre de Milnor motivique à l'infini. — Considérons $(X, i, \hat{f})$ une compactification de f. Pour tout couple d'entiers strictement positifs n et γ, considérons l'espace d'arcs

$$\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathcal{L}(F) \,\middle|\, \begin{array}{l} ord_t F.\varphi \le n\gamma \\ ord_t 1/\hat{f}(\varphi(t)) = n \end{array} \right\}.$$

Cet espace d'arcs est mesurable, même si la compactification est singulière, et sa mesure appartient à l'anneau de Grothendieck complété $\hat{\mathcal{M}}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$. On pourra se référer à **[11]**[4.3] pour la définition de la complétion.

On considère alors la *fonction zêta motivique modifiée* :

$$Z^\gamma_{1/\hat{f}, U_X^*}(T) = \sum_{n \ge 1} \mu(\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f})) T^n \in \hat{\mathcal{M}}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}[[T]].$$

Proposition 2.3. — *Pour toute compactification $(X, i, \hat{f})$ de f, il existe un entier γ_0, tel que pour tout entier γ supérieur à γ_0, la fonction zêta modifée $Z^\gamma_{1/\hat{f}, U_X^*}(T)$ est rationnelle et sa limite ne dépend pas de γ. L'opposé de cette limite est $S_{1/\hat{f}}(U_X^*)$ qui appartient à l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ (cf théorème 1.5). De plus si (Z, E) est une log-résolution du couple (X, F_X) alors*

$$S_{1/\hat{f}}(i : U \to X) = h_! S_{1/\hat{f} \circ h}(h^{-1}(U_X^*)).$$

Démonstration. — Si la compactification $(X, i, \hat{f})$ est singulière, son lieu singulier est alors contenu dans le fermé à l'infini F_X. La fibre de la valeur infini est elle même contenue dans F_X. La preuve de la proposition 1.4 (voir **[19**, 3.8**]**) montre qu'il existe un entier γ_0, tel que pour tout entier γ supérieur à γ_0, la fonction zêta modifée $Z^\gamma_{1/\hat{f}, U_X^*}(T)$ est rationnelle et sa limite ne dépend pas de γ : En effet, elle utilise une log-résolution (Z, E) du couple (X, F_X) et repose essentiellement sur la formule de changement de variables de Denef et Loeser **[10]** valable pour Y lisse et qui garde un sens pour X singulier. En particulier la série $Z^\gamma_{1/\hat{f}, U_X^*}(T)$ a une limite quand T tend vers l'infini, dont l'opposé est égal à $h_! S_{1/\hat{f} \circ h}(h^{-1}(U_X^*))$, lui-même égal à $S_{1/\hat{f}}(i_X : U \to X)$ qui appartient à l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ □

En prenant l'image directe sur le point on obtient le résultat d'indépendance suivant

Théorème 2.4. — *Soient* (X, i_X, f_X) *et* (Y, i_Y, f_Y) *deux compactifications. Après image directe, on dispose de l'égalité*

$$f_{Y!}S_{1/f_Y}(U_Y^*) = f_{X!}S_{1/f_X}(U_X^*) \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\{\infty\}\times\mathbb{G}_m}.$$

Cette valeur est appelée fibre de Milnor motivique à l'infini du morphisme f*, elle est notée* $S_{f,\infty}$ *et est indépendante de toute compactification.*

Remarque 2.5. — La fibre de Milnor motivique à l'infini est construite dans une compactification fixée à partir d'arcs dont l'origine appartient à la fibre à l'infini et est indépendante de la compactification. Cet objet ne dépend donc pas de l'ouvert U initial, mais seulement de la restriction de f au dessus d'un voisinage de l'infini. En particulier lorsque l'on retire à U les fibres des valeurs de bifurcation, le morphisme $f : U \setminus f^{-1}(B) \to \mathbb{A}^1_k$ est lisse mais sa fibre de Milnor motivique à l'infini est celle de $f : U \to \mathbb{A}^1_k$.

Remarque 2.6. — Par la suite s'il n'y a aucun risque de confusion on notera $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}$ l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\{\infty\}\times\mathbb{G}_m}$.

Remarque 2.7. — Lorsque k est le corps des nombres complexes, si l'on souhaite considérer la monodromie à l'infini le long d'un grand cercle orienté positivement dans $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, il faut appliquer à $\mathcal{S}_{f,\infty}$ l'opérateur *inv* de $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}$ sur lui même qui a une classe $[A \xrightarrow{l} \mathbb{G}_m, \sigma]$ associe la classe $[A \xrightarrow{inv\circ l} \mathbb{G}_m, \sigma]$ avec pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, $inv(\lambda)$ est égal à λ^{-1} (cf 2.2).

Démonstration. — La preuve de ce théorème d'indépendance repose sur un corollaire bien connu du théorème d'Hironaka :

Théorème 2.8. — *Soit* X *et* Y *deux variétés, munies d'un morphisme propre* $f_X : X \to \mathbb{P}^1_k$ *et* $f_Y : Y \to \mathbb{P}^1_k$*. Soit* F_X *un fermé de* X *et* F_Y *un fermé de* Y*, tels qu'il existe un isomorphisme* Ψ *de* $X \setminus F_X$ *vers* $Y \setminus F_Y$ *vérifiant l'égalité* $f_X = f_Y \circ \Psi$.
Il existe un quadruplet (Z, E, h_X, h_Y) *tel que le triplet* (Z, E, h_X) *est une log-résolution du couple* (X, F_X)*, le triplet* (Z, E, h_Y) *est une log-résolution du couple* (Y, F_Y) *et la composée* $f_X \circ h_X$ *est égale à la composée* $f_Y \circ h_Y$.

Démonstration. — On note Γ le graphe de Ψ. Comme le morphisme f_X est égal à la composée $f_Y \circ \Psi$, ce graphe est contenu dans le produit fibré $(X \times_{\mathbb{P}^1_k} Y, p_X, p_Y)$. On considère $\overline{\Gamma}$, son adhérence dans $X \times_{\mathbb{P}^1_k} Y$. Le graphe Γ est un ouvert lisse de $\overline{\Gamma}$ pour la topologie induite. En effet Γ est égal à $p_X^{-1}(X \setminus F_X) \cap p_Y^{-1}(Y \setminus F_Y) \cap \overline{\Gamma}$ et par continuité des projections, $p_X^{-1}(X \setminus F_X)$ et $p_Y^{-1}(Y \setminus F_Y)$ sont ouverts. Par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, considérons (Z, E, h) une log-résolution de $(\overline{\Gamma}, \overline{\Gamma}\backslash\Gamma)$. Notons alors $i_{\overline{\Gamma}}$ l'immersion fermée $\overline{\Gamma} \to X \times_{\mathbb{P}^1_k} Y$ puis h_X et h_Y les composées $p_X \circ i_{\overline{\Gamma}} \circ h$ et $p_Y \circ i_{\overline{\Gamma}} \circ h$. Comme f_X et f_Y sont propres, le produit fibré est lui-même propre au dessus de $\mathbb{P}^1_k$, donc les projections sont propres. De plus, l'immersion fermée $i_{\overline{\Gamma}}$ est propre, donc par composition h_X et h_Y sont propres. Le graphe Γ est isomorphe à $X \setminus F_X$ (par $p_X \circ i_{\overline{\Gamma}|\Gamma}$), donc à $Y \setminus F_Y$ (par composition avec Ψ^{-1}). Ainsi $X \setminus F_X$ et $Y \setminus F_Y$ sont isomorphes à $(Z\backslash E)$ via h_X et h_Y et (Z, E, h_X) (resp (Z, E, h_Y)) est une log-résolution de (X, F_X) (resp (Y, F_Y)). Enfin $i_{\overline{\Gamma}} \circ h$ étant à valeurs dans le produit fibré la composée $f_X \circ h_X$ est égale à $f_Y \circ h_Y$. □

Prouvons 2.4. Soit (X, i_X, f_X) et (Y, i_Y, f_Y) deux compactifications de f. Rappelons que les fermés à l'infini F_X et F_Y contiennent les lieux singuliers X_{sing} et Y_{sing} ainsi que les fibres de l'infini X_∞ et Y_∞. Les ouverts U_X et U_Y sont isomorphes par l'isomorphisme $i_X \circ i_Y^{-1}$ que nous notons Ψ. Le morphisme f_Y est alors la composée $f_X \circ \Psi$. Par le théorème de coiffage 2.8, il existe un quadruplet (Z, E, h_X, h_Y) tel que la composée $f_X \circ h_X$ est égale à la composée $f_Y \circ h_Y$, le triplet (Z, E, h_X) est une log-résolution du couple (X, F_X) et le triplet (Z, E, h_Y) est une log-résolution du couple (Y, F_Y). Notons que Z_∞, la fibre à l'infini des morphismes égaux $f_X \circ h_X$ et $f_Y \circ h_Y$, est un diviseur contenu dans E, donc naturellement à croisements normaux. On peut utiliser ces résolutions pour calculer et comparer les fibres de Milnor motiviques $S_{1/f_X}(U_X^*)$ et $S_{1/f_Y}(U_Y^*)$. On note Z_0 la fibre en zéro des morphismes égaux $f_X \circ h_X$ et $f_Y \circ h_Y$. Ainsi, le triplet $(Z \setminus Z_0, E \setminus Z_0, h_X)$ est une log-résolution du couple $(X \setminus X_0, F_X \setminus X_0)$ et $(Z \setminus Z_0, E \setminus Z_0, h_Y)$ est une log-résolution de $(Y \setminus Y_0, F_Y \setminus Y_0)$. Les ouverts $h_X^{-1}(U_X^*)$ et $h_Y^{-1}(U_Y^*)$ sont tous deux égaux à l'ouvert $(Z \setminus E) \setminus Z_0$. Par conséquent, par égalité des fonctions et des ouverts, $S_{1/f_X \circ h_X}(h_X^{-1}(U_X^*))$ est égale à $S_{1/f_Y \circ h_Y}(h_Y^{-1}(U_Y^*))$ dans l'anneau de Grothendieck $\hat{\mathcal{M}}^{\mathbb{G}_m}_{Z_\infty \times \mathbb{G}_m}$. Par le théorème de rationalité 2.3, en appliquant la composition des images directes $f_{X!} \circ h_{X!}$ et $f_{Y!} \circ h_{Y!}$, tous deux égaux à $(f_X \circ h_X)_!$ et $(f_Y \circ h_Y)_!$, on obtient dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\{\infty\} \times \mathbb{G}_m}$ l'égalité voulue.

$\square$

2.4. Réalisation de Hodge. — On suppose ici k égal à $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ une application régulière à source lisse. Soit $(X, i, \hat{f})$ une compactification de f. Considérons $S_{1/\hat{f}}$ le morphisme de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$-modules de $\mathcal{M}_{X \setminus X_0}$ vers $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ rappelé en 1.5. En appliquant le théorème 1.8 et la compatibilité des modules de Hodge mixtes avec l'image directe (ici sur le point) $R\hat{f}_!$ nous obtenons avec les notations ci-dessus :

Théorème 2.9. — *Pour une compactification $(X, i, \hat{f})$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}_{X \setminus X_0} & \xrightarrow{S_{1/\hat{f}}} & \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m} & \xrightarrow{\hat{f}_!} & \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\{\infty\} \times \mathbb{G}_m} \simeq \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m} \\
\downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle H} \\
K_0\left(MHM_{X \setminus X_0}\right) & \xrightarrow{\Psi_{1/\hat{f}}} & K_0\left(MHM^{mon}_{X_\infty}\right) & \xrightarrow{R\hat{f}_!} & K_0\left(MHM^{mon}_{\{\infty\}}\right) \simeq K_0\left(MHM^{mon}_{Spec\mathbb{C}}\right)
\end{array}$$

En particulier $H(\mathcal{S}_{f,\infty}) = R\hat{f}_!(\Psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbf{Q}_U))$.

Avec les notations de la partie 1.4.2 on déduit alors du théorème précédent

Théorème 2.10. — *Pour une application régulière $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, la classe de la structure de Hodge mixte limite de f à l'infini est $\chi_h(\mathcal{S}_{f,\infty})$. En particulier, elle ne dépend pas de la compactification. Le spectre à l'infini de f est alors égal à $Sp(\mathcal{S}_{f,\infty})$.*

Démonstration. — La structure de Hodge mixte limite sur $H^k_c\left(f^{-1}(t), \mathbb{Q}\right)$ s'identifie à la structure de Hodge mixte de $\mathbb{H}^k_c(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\underline{\mathbb{Q}}_U))$. On obtient ce groupe d'hypercohomologie en prenant le faisceau pervers sous jacent du module de Hodge mixte $R\hat{f}_!(\Psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbf{Q}_U))$. La classe de la structure de Hodge mixte limite de f à l'infini est par définition, la somme alternée $\sum_k (-1)^k [\mathbb{H}^k_c(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\underline{\mathbb{Q}}_U))]$ dans $K_0(SH^{mon})$. Elle vaut $\Phi(R\hat{f}_!(\Psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbf{Q}_U)))$ égal à $\Phi(H(\mathcal{S}_{f,\infty}))$ par les paragraphes 1.4.2.2, 1.4.2.3 et le théorème 2.9. $\square$

3. Fibre de Milnor motivique à l'infini d'un polynôme non dégénéré

3.1. Polyèdres de Newton et non dégénerescence. — Dans cette partie k est un corps de caractéristique 0 et nous fixons un entier strictement positif d et un polynôme de Laurent f appartenant à l'anneau $k[x_1,\ x_1^{-1}...,\ x_d,\ x_d^{-1}]$. Nous noterons $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients. Il définit une fonction $f:\mathcal{U}\to\mathbb{A}^1_k$ où $\mathcal{U}$ est son domaine de définition. Notons que $\mathcal{U}$ contient le tore $\mathbb{G}_m^d$. L'ensemble $\{\underline{k}\in\mathbb{Z}^d\mid\alpha_{\underline{k}}\neq 0\}$ est appelé *support* de f et on le note $\mathrm{supp}(f)$. L'enveloppe convexe de $\mathrm{supp}(f)\cup\{0\}$ est un polyèdre appelé *polyèdre de Newton à l'infini* de f et noté Γ_- . On note Γ les faces de Γ_- ne contenant pas l'origine. On notera enfin Γ° l'ensemble des faces de Γ_- qui ne sont pas contenues dans une face contenant 0.

Remarque 3.1. — Cette définition du polyèdre de Newton correspond à celle de Kouchnirenko **[22]** pour les éléments de $k[x_1,..,x_d]$ mais pas pour les polynômes de Laurent qui ne sont pas des polynômes. Nous justifierons ce choix à la remarque 3.7.

Pour une face γ de Γ_- on note f_γ le polynôme $\sum_{\underline{k}\in\gamma}\alpha_{\underline{k}}\,\underline{x}^{\underline{k}}$. Au sens de Kouchnirenko **[22]**, on dit que le polynôme f est *non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini*, si pour toute face γ de Γ le polynôme f_γ est lisse sur $\mathbb{G}_m^d$. Nous supposons dans toute la suite que le polynôme de Laurent f est non dégénéré pour Γ.

Un polynôme f dans $k[x_1,..,x_d]$ est dit *commode* si et seulement si son polyèdre de Newton rencontre chaque axe de coordonnée. Un polynôme de Laurent f dans $k[x_1,...,x_d][x_1^{-1},...,x_d^{-1}]$ est dit *commode* si et seulement si aucune face de son polyèdre de Newton ne contient 0.

Enfin pour toute face γ de Γ, on introduit la variété $X_\gamma(0):=\{x\in\mathbb{G}_m^d\mid f_\gamma(x)=0\}$.

3.2. Compactification. — Il existe deux polynômes premiers entre eux P et Q appartenant à $k[x_1,...,x_d]$ tels que Q soit monomial et f égal à la fraction rationnelle P/Q.

Notation 3.2. — Pour un polynôme de Laurent $\mathcal{P}$ en d variables, on note $\tilde{\mathcal{P}}(\underline{x_{i,0},x_{i,1}})$ le polynôme homogène $(\prod_{i=1}^d {x_{i,0}}^{\deg_i\mathcal{P}})\mathcal{P}(\underline{x_{i,1}/x_{i,0}})$ où $\deg_i\mathcal{P}$ est le degré en la variable x_i.

Dans $(\mathbb{P}^1)^d\times\mathbb{P}^1$, on considère alors la variété

$$X:=\left\{(\underline{[x_{i,0}:x_{i,1}]},[\alpha:\beta])\,\middle|\;\alpha\widetilde{P}(\underline{x_{i,0},x_{i,1}})\prod_{i=1}^d {x_{i,0}}^{\deg_i(Q)}=\beta\prod_{i=1}^d x_{i,0}^{\deg_i(P)}\tilde{Q}(\underline{x_{i,0},x_{i,1}})\;\right\}_{red},$$

l'immersion ouverte dominante i de $\mathcal{U}$ dans X qui associe à x de $\mathcal{U}$, l'élément $(\underline{[1:x_i]},[1:f(x)])$ et le morphisme propre $\hat{f}$ de X vers $\mathbb{P}^1_k$ induit par la deuxième projection.

3.3. Résultats. — Nous commençons par traîter le cas d'un polynôme restreint au tore :

Théorème 3.3. — *Pour un polynôme de Laurent $f:\mathbb{G}_m^d\to\mathbb{A}^1_k$ non dégénéré pour son polyèdre de Newton, la fibre de Milnor motivique à l'infini est égale dans l'anneau $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ à*

$$\mathcal{S}_{f,\infty}=-\sum_{\gamma\in\Gamma^\circ}(-1)^{d-\dim\gamma}\left[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma\right].$$

où Γ° est l'ensemble des faces du polyèdre de Newton non contenues dans les faces qui contiennent 0 et pour toute face γ, σ_γ est l'action du groupe $\mathbb{G}_m$ sur $X_\gamma(0)$ définie par $\sigma_\gamma(\lambda,(\underline{x_i}))$ égal à $(\lambda^{-\omega_i}x_i)$ où ω est un élément du cône dual de la face γ.

Exemple 3.4. — Si $f : \mathbb{G}_m^d \to \mathbb{A}_k^1$ est polynôme de Laurent non dégénéré et commode alors :

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma} (-1)^{d-\dim\gamma} \left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma\right].$$

Si de plus ce polynôme de Laurent est un polynôme commode alors :

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma^\circ} (-1)^{d-\dim\gamma} \left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma\right].$$

où Γ° est l'ensemble des faces du polyèdre de Newton qui ne sont pas contenues dans un hyperplan de coordonnées.

Nous traîtons ensuite le cas général des polynômes non dégénérés mais considérés sur leur ensemble de définition $\mathcal{U}$ (théorème 3.24). Par additivité du morphisme $S_{1/\hat{f}}$ (théorème 1.5), on calcule $S_{1/\hat{f}}(\mathcal{U})$ comme somme de $S_{1/\hat{f}}$ évalué sur des sous tores de $\mathcal{U}$ puis on applique le théorème 3.3.

En particulier, par le corollaire 2.10 nous obtenons une décomposition du *spectre à l'infini de* f en termes de spectres de variétés quasi-homogènes :

Théorème 3.5. — *Lorsque k est le corps des nombres complexes, si f est un polynôme de Laurent non dégénéré pour son polyèdre de Newton alors le spectre à l'infini du morphisme $f : \mathbb{G}_m^d \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ est donné par la formule*

$$Sp(f,\infty) = -\sum_{\gamma\in\Gamma^\circ} (-1)^{d-\dim\gamma} Sp([f_\gamma^{-1}(1), \sigma_{\hat{\mu},\gamma}])$$

où Γ° est l'ensemble des faces du polyèdre de Newton, non contenues dans les faces qui contiennent 0 et pour toute face γ, $\sigma_{\hat{\mu},\gamma}$ est l'action du groupe $\hat{\mu}$ sur $f_\gamma^{-1}(1)$, définie par $\sigma_{\hat{\mu},\gamma}(\lambda, (\underline{x_i}))$ égal à $(\lambda^{-\omega_i} x_i)$ où ω est un élément du cône dual de la face γ.

3.4. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini au dessus du tore. — Commençons par calculer la fibre de Milnor motivique de $f : \mathbb{G}_m^d \to \mathbb{A}_k^1$ (théorème 3.3). Dans cette sous-partie, nous notons U l'ouvert $i(\mathbb{G}_m^d \setminus f^{-1}(0))$ de $X \setminus X_0$ et F son complémentaire.

3.4.1. Arcs tracés sur X. — Les arcs tracés sur X sont de la forme $(\underline{[x_{i,0}(t) : x_{i,1}(t)]}, [\alpha(t) : \beta(t)])$ où $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $x_{i,0}(t)$ et $x_{i,1}(t)$, pour tout i appartenant $\{1,..,d\}$, sont des séries formelles vérifiant dans l'anneau $k[[t]]$, l'équation

$$\alpha(t)\widetilde{P}(\underline{x_{i,0}(t), x_{i,1}(t)})\prod_{i=1}^{d} x_{i,0}(t)^{\deg_i(Q)} = \beta(t)\prod_{i=1}^{d} x_{i,1}(t)^{\deg_i(P)}\tilde{Q}(\underline{x_{i,0}(t), x_{i,1}(t)}) \tag{1}$$

et telles que les couples $(\alpha(0), \beta(0))$ et $(x_{i,0}(0), x_{i,1}(0))$ pour tout i appartenant $\{1,..,d\}$, sont non nuls.

Remarque 3.6. — Dans toute la suite nous considérerons des arcs dont le point générique appartient à l'ouvert. Ces arcs ne sont donc pas tracés dans les hyperplans de coordonnées. Par conséquent, pour tout i dans $\{1,..,d\}$, les ordres $\mathrm{ord}_t\, x_{i,0}(t)$ et $\mathrm{ord}_t\, x_{i,1}(t)$ sont finis.

Remarque 3.7. — Tout arc φ, non tracé dans les hyperplans de coordonnées peut s'écrire sous la forme $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ où ω_i appartient à $\mathbb{Z}$ et $P_i(t)$ est une série formelle inversible pour tout i

dans $\{1,..,d\}$. Dans toute la suite nous considérerons les arcs écrits sous cette forme. Notons α_k les coefficients de f. L'évaluation de f sur un tel arc est :

$$f(\varphi(t)) = \sum_{k\in\text{supp}(f)} \alpha_k P(t)^k t^{-(k|\omega)}$$

où $P(t)^k$ est le produit $\prod_{i=1}^d P_i(t)^{k_i}$ et $(k \mid \omega)$ la somme $\sum_{i=1}^d k_i\omega_i$ pour tout k dans $\text{supp}(f)$. Pour calculer l'ordre de $f(\varphi(t))$, nous calculerons le maximum $\max\{(k \mid \omega) \mid k \in \text{supp}(f)\}$ et nous considérerons les ω pour lesquels cette quantité est strictement positive. Nous serons donc amener à utiliser Γ_- l'enveloppe convexe de l'union $\text{supp}(f) \cup \{0\}$. Pour tout ω dans $\mathbb{Z}^d$, notons l_ω la forme linéaire $(\omega \mid .)$ définie sur $\mathbb{R}^d$. Le maximum de la restriction $l_{\omega|\Gamma_-}$ sera noté $m_\Gamma(\omega)$. Il est positif et atteint sur une face de Γ_- notée $\gamma(\omega)$. En particulier $(\omega \mid .)$ est constante sur $\gamma(\omega)$, car les lignes de niveaux de l_ω sont des hyperplans affines. Si ce maximum est strictement positif, il est alors atteint sur Γ, qui est l'ensemble des faces ne contenant pas 0. S'il est nul alors il est atteint sur une face contenant 0, or Γ_- contient le support de f, donc pour tout k appartenant au support, le produit scalaire $(k \mid \omega)$ est négatif. On obtient alors

Proposition et notations 3.8. — *Soit ω dans $\mathbb{Z}^d$ et φ un arc de Laurent de la forme $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ où chaque $P_i(t)$ est une série formelle inversible. On considère la forme linéaire $(\omega \mid .)$ définie sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi :*

1. *Le maximum de $(\omega \mid .)$ restreinte à Γ_- sera noté $m_\Gamma(\omega)$. Il est positif et atteint sur une face de Γ_- notée $\gamma(\omega)$. En particulier $(\omega \mid .)$ est constante sur $\gamma(\omega)$.*
2. *Notons $(\alpha_{\underline{k}})_{\underline{k}}$ les coefficients du polynôme f, et posons pour toute face γ*
$$\tilde{f}_\gamma(\underline{x}, u) := f_{\gamma(\omega)}(\underline{x}) + \sum_{\underline{k}\notin\gamma} \alpha_{\underline{k}} u^{m_\Gamma(\underline{\omega})-(\underline{k}|\omega)}\ \underline{x}^{\underline{k}}.$$
On obtient alors l'égalité $f(\varphi(t)) = (1/t^{m_\Gamma(\omega)})\tilde{f}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_i}(t), t)$.
3. *L'ordre $ord_t\ 1/f(\varphi(t))$ est égal à $m_\Gamma(\omega) - ord_t\ \tilde{f}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_i(0)}, t)$. En particulier si l'entier $ord_t\ 1/f(\varphi(t))$ est strictement positif alors $m_\Gamma(\omega)$ est strictement positif.*
4. *Lorsque $(P_i(0))$ n'annule pas $f_{\gamma(\omega)}$, le coefficient angulaire $ac1/f(\varphi(t))$ vaut $1/f_{\gamma(\omega)}(\underline{P_i(0)})$.*
5. *Pour tout arc $\varphi(t)$ égal à $(P_i(t)/t^{\omega_i})$, si l'origine $\varphi(0)$ appartient à X_∞ alors l'ordre $ord_t 1/f(\varphi(t))$ est non nul donc $m_\Gamma(\omega)$ est strictement positif.*
6. *On note Ω l'ouvert $\{\omega \in \mathbb{Z}^d \mid m_\Gamma(\omega) > 0\}$. Pour tout ω dans Ω, la face $\gamma(\omega)$ ne contient pas 0, elle appartient à Γ.*
7. *Pour toute face γ dans Γ, on désigne par $\sigma(\gamma)$ l'intérieur, dans son espace vectoriel engendré dans $\mathbb{R}^d$, du cône positif engendré par l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid \gamma(\omega) = \gamma\}$. Cet ensemble est un cône polyédral rationnel convexe relativement ouvert. Pour une face γ de la forme $\gamma_1\cap...\cap\gamma_s$ intersections de faces de codimension 1, en notant $\alpha^{(i)}$ le vecteur normal à γ_i, extérieur à Γ, à coordonnées entières et de plus petite norme, le cône $\sigma(\gamma)$ est égal à la somme $\sum_{i=1}^s \mathbb{R}_*^+\alpha^{(i)}$ de dimension $d - \dim\gamma$.*

Démonstration. — Tout est immédiat et classique. Le polyèdre de Newton Γ_- est compact, la forme linéaire $(\omega \mid .)$ est continue et s'annule en 0. Par conséquent le maximum de la restriction est positif. Les lignes de niveaux sont des hyperplans, ce maximum est donc atteint sur une face de Γ_-. □

Exemples 3.9. — Quelques exemples :

1. Soit γ une face de Γ_- de codimension 1 et $\overrightarrow{n}$ dans $\mathbb{Z}^d$ le vecteur normal à γ extérieur à Γ_- et de norme minimale. En ce cas, la face $\gamma(\overrightarrow{n})$ est la face γ.
2. Pour un polynôme commode l'ouvert Ω est égal à $\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_-$.
3. Pour un polynôme de Laurent commode l'ouvert Ω est égal à $\mathbb{Z}^d$.

3.4.2. Fonction zêta motivique. —

Définition 3.10. — Soit n et δ deux entiers strictement positifs, on pose

$$\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(X \setminus X_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{ord}_t F\varphi \leq n\delta, \\ \mathrm{ord}_t 1/\hat{f}(\varphi(t)) = n \end{array} \right\}.$$

On munit $\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f})$ de la flèche (π_0, ac), "(origine, coefficient angulaire)" vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ qui a un arc φ associe $(\varphi(0), \mathrm{ac}\, 1/\hat{f}(\varphi))$, et de l'action σ de $\mathbb{G}_m$. On vérifie que les fibres du morphisme π_0 sont invariantes sous l'action de σ et ac est homogène de poids n pour σ. Pour tout entier positif k, les tronqués $(\pi_{n\delta+k}(\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f}))$, $(\pi_{n\delta+k,0}, ac)$, $\sigma)$ appartiennent à $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$.

Proposition 3.11. — *Pour tout couple d'entiers strictement positifs (n, δ), $\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f})$ se réécrit comme suit :*

$$\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f}) = \left\{ \varphi(t) = (P_i(t)/t^{\omega_i}) \;\middle|\; \begin{array}{l} P_i(t) \in k[[t]]^* \\ (\omega_i) \in \Omega \\ \forall i \in \{1, ..., d\} \ |\omega_i| \leq n\delta \\ ord_t\ 1/f(\underline{P_i(t)/t^{\omega_i}}) = n \end{array} \right\}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que le fermé F est localement donné par les équations $x_{i,0} = 0$ et $x_{i,1} = 0$ avec i appartenant à $\{1, .., d\}$. □

Par la définition 1.3, pour tout entier δ strictement positif, on considère la fonction zêta motivique modifiée

$$Z^{\delta}_{1/\hat{f},U}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(1/\hat{f}))T^n \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}[[T]].$$

Proposition 3.12. — *Décomposition de la fonction zêta motivique :*

– *Pour tout couple d'entiers strictement positifs (n, δ), pour tout (ω_i) dans Ω, on note*

$$\mathscr{X}^{\delta}_{n,\omega}(f) := \{\ (P_i(t)/t^{a_i}) \in \mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(f) \ \big|\ \omega_i = a_i\ \}.$$

Cet espace d'arcs est muni de l'application "origine, coefficient angulaire" et de l'action de $\mathbb{G}_m$ induites par celle de $\mathscr{X}^{\delta}_{n,U}(f)$.

– *Pour une face γ fixée, pour tout entier δ strictement positif, nous considérons les cônes*

$$C^{\delta,=}_{\gamma} := \{\omega \in \sigma(\gamma) \mid |\omega_i| \leq m_\Gamma(\omega)\delta\}$$

et

$$C^{\delta,<}_{\gamma} := \{n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \sigma(\gamma) \mid \forall i \in \{1, .., d\}\ m_\Gamma(\omega) > n \geq |\omega_i/\delta|\}.$$

Tous deux sont des cônes polyédraux rationnels convexes.

Avec ces notations pour tout entier δ strictement positif, la fonction zêta se décompose comme suit

$$(2)\quad Z^{\delta}_{1/\hat{f},U}(T) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\ \sum_{\omega\in C^{\delta,=}_{\gamma}\cap\mathbb{Z}^d} \mu(\mathscr{X}^{\delta}_{m_\Gamma(\omega),\omega}(f))T^{m_\Gamma(\omega)} + \sum_{\gamma\in\Gamma}\ \sum_{(n,\omega)\in C^{\delta,<}_{\gamma}\cap\mathbb{Z}^{d+1}} \mu(\mathscr{X}^{\delta}_{n,\omega}(f))T^{n}.$$

Démonstration. — Il suffit de classer les arcs suivant leur ω, puis chaque ω suivant la face $\gamma(\omega)$ qui lui est associée et enfin d'appliquer l'additivité de la mesure. □

3.4.3. Stratification des cônes. — On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{-1,0,1\}^d$. Par la suite, à cause de l'action de $\mathbb{G}_m$, nous aurons besoin de stratifier :

– $\mathbb{R}^d$ en cônes de la forme C_ε où ε appartient à $\mathcal{E}$ et
$$C_\varepsilon := \left\{(k_i)\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, k_i>0 \,\text{si}\, \varepsilon_i>0,\ k_i<0 \,\text{si}\, \varepsilon_i<0,\ k_i=0 \,\text{si}\, \varepsilon_i=0\ \right\}.$$
Chaque C_ε est un "quadrant" de $\mathbb{R}^d$.

– $\sigma(\gamma)$ en cônes $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$ égal à $\sigma(\gamma)\cap C_\varepsilon$, pour toute face γ de Γ et ε dans $\mathcal{E}$.

– $C^{\delta,=}_{\gamma}$ en cônes $C^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}$ égal à $C^{\delta,=}_{\gamma}\cap C_\varepsilon$ et $C^{\delta,<}_{\gamma}$ en cônes $C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}$ de la forme $C^{\delta,<}\cap C_\varepsilon$, pour une face γ fixée, pour tout entier δ strictement positif et ε dans $\mathcal{E}$.

3.4.4. L'élément $\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0)$ vu dans $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$.— Soit γ une face de Γ et ω dans $\sigma(\gamma)$. Avec les notations 2.1.1, on munit $\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0)$ de la flèche p_ω vers $X_\infty\times\mathbb{G}_m$
$$p_\omega : (\underline{a_i}) \mapsto (([\underline{x_i}],[0:1]),\ 1/f_\gamma(\underline{a_i}))$$
où x_i vaut l'infini si ω_i est strictement positif, 0 si ω_i est strictement négatif et a_i si ω_i est nul. Remarquons que $([\underline{x_i}],[0:1])$ appartient bien à X_∞ ; par exemple comme origine de l'arc (a_i/t^{ω_i}) de $\mathscr{X}^{\delta}_{m_\Gamma(\omega),\omega}$. Pour ω' et ω'' appartenant au cone $\sigma(\gamma)$, les applications $p_{\omega'}$ et $p_{\omega''}$ sont égales si et seulement si pour tout i dans $\{1,..,d\}$, les entiers ω_i et ω'_i sont tous les deux nuls, ou ont le même signe. Soit ω dans $\sigma(\gamma)$, l'application p_ω ne dépend donc que de la strate C_ε contenant ω, on note donc $p_{\gamma,\varepsilon}$ cette application.

On munit de plus $\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0)$ de l'action σ_ω du groupe $\mathbb{G}_m$: $\sigma_\omega(\lambda,(\underline{x_i})) = (\underline{\lambda^{-\omega_i}x_i})$. Notons que par quasi-homogénéité de f_γ, la flèche vers $\mathbb{G}_m$ est homogène de poids $m_\Gamma(\omega)$. Par opposition à $p_{\gamma,\varepsilon}$ cette action dépend de ω. On obtient alors la variété $(\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\omega)$ appartenant à $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$. Néanmoins on dispose de la proposition

Proposition 3.13. — *Pour une face γ dans Γ, pour ε dans $\mathcal{E}$, pour ω et ω' appartenant au cône $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, les classes sont classes sont égales dans l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}$*
$$[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\omega] = [\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_{\omega'}].$$
On notera cette classe $[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\gamma]$. De plus $[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{\pi_{\mathbb{G}_m}\circ p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} \mathbb{G}_m,\sigma_\gamma]$ ne dépend pas de la strate $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, on notera cette classe $[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{f_\gamma^{-1}}{\to} \mathbb{G}_m,\sigma_\gamma]$.

Démonstration. — Soit ω et ω' appartenant au cône $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, montrons l'égalité
$$[\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\omega] = [\mathbb{G}_m^d\setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_{\omega'}] \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}.$$
Dans ce qui suit nous sous entendrons le but $X_\infty\times\mathbb{G}_m$ dans l'écriture des classes. Notons $<\gamma>$ le sous réseau saturé engendré par γ. On note r son rang. Par application du théorème de la base adaptée il existe une base $(e_1,...,e_d)$ de $\mathbb{Z}^d$ telle que $(e_1,...,e_r)$ soit une base de $<\gamma>$. Les facteurs invariants sont égaux à 1 car $<\gamma>$ est saturé. Notons $A=(a_i^j)$ (i indiçant les lignes et j les colonnes) la matrice de passage de la base (e_i) à la base canonique de $\mathbb{Z}^d$; les colonnes

de A sont les vecteurs de la base canonique exprimés dans la base (e_i). En particulier, pour tout β appartenant à γ, $A\beta$ est de la forme ${}^t(\delta_1, ..., \delta_r, 0, ..., 0)$. Considérons alors l'isomorphisme Φ induit sur $\mathbb{G}_m^d$:

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^d & \to & \mathbb{G}_m^d \\ (y_i) & \mapsto & (x_j) = \left(\prod_{i=1}^d y_i^{a_i^j}\right)_j \end{array} \quad \text{et} \quad \Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^d & \to & \mathbb{G}_m^d \\ (x_i) & \mapsto & (y_k) = \left(\prod_{i=1}^d x_l^{b_l^k}\right)_k \end{array}$$

Pour y dans $\mathbb{G}_m^d$ et ω dans $\mathbb{Z}^d$ on note y^α le produit $\prod_{i=1}^d y_i^{\alpha_i}$. Le produit $\Phi(y)^\beta$ est égal à $y^{A\beta}$ pour β appartenant à γ . Par conséquent, pour tout β appartenant à γ, $\Phi(y)^\beta$ est un monôme en les variables $y_1, ..., y_r$, donc le polynôme $f_\gamma \circ \Phi$ est lui même un polynôme en les variables $y_1, ..., y_r$, il s'écrit $\sum_{\beta\in\gamma} c_\beta y^{A\beta}$ pour $f_\gamma(x)$ égal à $\sum_{\beta\in\gamma} c_\beta x^\beta$. Notons alors

$$g_\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^r & \to & \mathbb{G}_m \\ (y_1, ..., y_r) & \mapsto & (f_\gamma \circ \Phi)(y_1, ..., y_r, 1, ..., 1) \end{array}.$$

et considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0) \arrow[d, "f_\gamma^{-1}"'] & \mathbb{G}_m^d \setminus (f_\gamma \circ \Phi)^{-1}(0) = \left(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)\right) \times \mathbb{G}_m^{d-r} \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[dl, "(f_\gamma\circ\Phi)^{-1}"] \\ \mathbb{G}_m & \end{tikzcd}$$

Par l'isomorphisme Φ, l'action σ_ω de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0)$ est transformée en l'action $\sigma_{{}^tA^{-1}\omega}$ de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{G}_m^d \setminus (f_\gamma \circ \Phi)^{-1}(0)$. En effet, notons $\tilde{\sigma_\omega}$ l'action remontée par Φ. Pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, pour tout x dans $\mathbb{G}_m^d$, l'action $\tilde{\sigma_\omega}$ vérifie nécessairement l'égalité entre $\Phi(\tilde{\sigma_\omega}(\lambda, \underline{x_i}))$ et $\sigma_\omega(\lambda, \Phi(\underline{x_i}))$, ou encore entre $\tilde{\sigma_\omega}(\lambda, \underline{x_i})$ et $\Phi^{-1}(\sigma_\omega(\lambda, \Phi(\underline{x_i}))$. On obtient ainsi les égalités :

$$\tilde{\sigma_\omega}(\lambda, x) = \left(\prod_{l=1}^d \left(\lambda^{-\omega_l}\prod_{i=1}^d x_i^{a_i^l}\right)^{b_l^k}\right)_k = \left(\lambda^{-\sum\limits_{l=1}^d \omega_l b_l^k}\prod_{i=1}^d x_i^{\sum\limits_{l=1}^d a_i^l b_l^k}\right)_k = \left(\lambda^{-\sum\limits_{l=1}^d \omega_l b_l^k} x_k\right)_k = \lambda^{-{}^tA^{-1}\omega}x.$$

Montrons que pour tout y dans $\mathbb{G}_m^d \setminus (f_\gamma \circ \Phi)^{-1}(0)$ et pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, $\tilde{\sigma_\omega}(\lambda, y)$ n'appartient pas à $(f_\gamma \circ \Phi)^{-1}(0)$. Sinon, par application de Φ, $\sigma_\omega(\lambda, \Phi(y))$ appartient à $f_\gamma^{-1}(0)$. Or pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, pour tout x dans $\mathbb{G}_m^d$, $\sigma_\omega(\lambda, x)$ appartient à $f_\gamma^{-1}(0)$ si et seulement si x appartient à $f_\gamma^{-1}(0)$ car $f_\gamma(\sigma_\omega(\lambda, x))$ est égal à $\lambda^{-m_\Gamma(\omega)} f_\gamma(x)$. Donc $\Phi(y)$ appartient à $f_\gamma^{-1}(0)$ donc y appartient à $(f_\gamma \circ \Phi)^{-1}(0)$. Contradiction. Par isomorphisme, nous avons dans $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ l'égalité des classes

$$\left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), p_{\gamma,\varepsilon}, \sigma_\omega\right] = \left[\left(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)\right) \times \mathbb{G}_m^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \tilde{\sigma_\omega}\right]$$

où $\tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}$ est égal à $\left(\pi_{X_\infty} \circ p_{\gamma,\varepsilon}, (f_\gamma \circ \Phi)^{-1}\right)$ et $\tilde{\sigma_\omega}$ est égal à $\sigma_{{}^tA^{-1}\omega}$. Pour montrer que dans l'anneau $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$, la classe $[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), p_{\gamma,\varepsilon}, \sigma_\omega]$ est égale à la classe $[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), p_{\gamma,\varepsilon}, \sigma_{\omega'}]$ nous montrons plutôt que les classes $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{G}_m^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \tilde{\sigma_\omega}]$ et $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{G}_m^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \tilde{\sigma_{\omega'}}]$ sont égales. Notons pour cela $\tilde{\omega}$ le vecteur ${}^tA^{-1}\omega$. Pour tout y appartenant à $(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{G}_m^{d-r}$ et pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, $\tilde{\sigma_\omega}(\lambda, y)$ est égal à $(\lambda^{-\tilde{\omega}_i} y_i)$. On décompose cette action en un produit $\tilde{\sigma_\omega} = \sigma_{\tilde{\omega}} = \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega}} \times \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}\tilde{\omega}}$. La fonction $f_\gamma \circ \Phi$ ne dépend que des variables $y_1, .., y_r$, et nous obtenons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \left(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)\right) \times \mathbb{G}_m^{d-r} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}"'] & \left(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)\right) \times \mathbb{A}^{d-r} \arrow[dl, "\tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}"] \\ \mathbb{G}_m & \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique. L'action $\sigma_{\tilde{\omega}}$ se prolonge naturellement à $(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{A}^{d-r}$. Nous sommes dans le cas d'application de l'identification des actions 1.1.2, ainsi la classe $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{A}^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \sigma_{\tilde{\omega}} = \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega}} \times \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}\tilde{\omega}}]$ ne dépend pas de l'action $\sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}\tilde{\omega}}$ de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^{d-r}$. En effet, l'action $\sigma_{\tilde{\omega}}$ relève l'action $\sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}}$ de $\mathbb{G}_m$ sur la variété $\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)$ et cela, quelque soit l'action $\sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}\tilde{\omega}}$ de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^{d-r}$. Cette identification se propage alors à la classe $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{G}_m^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \tilde{\sigma_\omega}]$.

Lemme 3.14. — *Si $(Y \times \mathbb{G}_m^l, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l})$ et $(Y \times \mathbb{G}_m^l, p, \sigma_Y \times \sigma'_{\mathbb{G}_m^l})$ admettent un prolongement naturel en $(Y \times \mathbb{A}^l, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l})$ et $(Y \times \mathbb{G}_m^l, p, \sigma_Y \times \sigma'_{\mathbb{G}_m^l})$ alors les classes $[Y \times \mathbb{G}_m^l, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l}]$ et $[Y \times \mathbb{G}_m^l, p, \sigma_Y \times \sigma'_{\mathbb{G}_m^l}]$ sont égales.*

Démonstration. — La preuve se fait par récurence sur l, en utilisant les relations d'additivités, l'égalité des classes $[Y \times \{0\}^k \times \mathbb{A}^{l-k}, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l}]$ et $[Y \times \{0\}^k \times \mathbb{A}^{l-k}, p, \sigma_Y \times \sigma'_{\mathbb{G}_m^l}]$, la stratification de $\mathbb{A}_k^d$ en produit de tores et enfin l'hypothèse de récurence sur les variétés qui sont du type suivant $(Y \times \{0\}^k \times \mathbb{G}_m^{l-k}, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l})$. Le point de départ étant l'égalité entre les classes $[Y \times \{0\}^l, p, \sigma_Y \times \sigma_{\mathbb{G}_m^l}]$ et $[Y \times \{0\}^l, p, \sigma_Y \times \sigma'_{\mathbb{G}_m^l}]$. □

On obtient ainsi l'égalité

$$[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)) \times \mathbb{G}_m^{d-r}, \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega}} \times \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}\tilde{\omega}}] = [(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)), \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega}}] * (\mathbb{L}-1)^{d-rg(<\gamma>)}$$

Montrons alors que $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)), \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega}}]$ et $[(\mathbb{G}_m^r \setminus g_\gamma^{-1}(0)), \tilde{p}_{\sigma_{\gamma,\varepsilon}}, \sigma_{\pi_{\mathbb{Z}^r}\tilde{\omega'}}]$ sont égaux. Par adjonction, pour tout β dans γ, $(\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega) \mid \pi_{\mathbb{Z}^r}(A\beta))$, $({}^tA^{-1}\omega \mid A\beta)$ et $(\omega \mid \beta)$ sont égaux car $\pi_{\mathbb{Z}^{d-r}}(\beta)$ est nul. La face γ ne contient pas 0 donc $(\omega \mid \beta)$ est égal à $m_\Gamma(\omega)$ et donc strictement positif ainsi $\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega)$ est non nul. Les vecteurs $\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega)$ et $\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega')$ sont alors non nuls. Ces vecteurs sont colinéaires dans $\mathbb{Z}^r$: les formes linéaires $\big(\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega) \mid .\big)$ et $\big(\pi_{\mathbb{Z}^r}({}^tA^{-1}\omega) \mid .\big)$ sont constantes sur l'hyperface $A\gamma$ car γ ne contient pas 0. Elles sont donc nulles sur la direction $A\vec{\gamma}$ qui est un hyperplan de $\mathbb{R}^r$, les vecteurs sont normaux à cette hyperplan et donc colinéaires de rapports k. Le passage de σ_ω à $\sigma_{\omega'}$ se fait alors par ramification puis par identification des actions 1.1.2. Les résultats suivent en remarquant que par définition f_γ^{-1} est $\pi_{\mathbb{G}_m} \circ p_{\sigma,\varepsilon_i}$. □

3.4.5. L'élément $X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m$ vu dans $Var_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$.— On munit $X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m$ de la flèche p_ω vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$:

$$p_\omega : ((a_i), \mu) \mapsto ((\underline{[x_i]}, [0:1]),\ \mu)$$

où x_i vaut l'infini si ω_i est strictement positif, 0 si ω_i est strictement négatif et a_i si ω_i est nul. Remarquons que $(\underline{[x_i]}, [0:1])$ appartient bien à X_∞, par exemple comme origine de l'arc (a_i/t^{ω_i}) de $\mathscr{X}_{m,\omega}^\delta$, où par la proposition 3.8, m appartient à $\{1, ..., m_\Gamma(\omega)-1\}$. Comme dans 3.4.4, la fonction p_ω ne dépend que de $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, on la note donc $p_{\gamma,\varepsilon}$. On munit de plus $X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m$ de l'action τ_n de $\mathbb{G}_m$ définie par $\tau_n(\lambda, ((a_i), \mu))$ égal à $((a_i), \lambda^n\mu)$. L'élément $(X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty \times \mathbb{G}_m, \tau_n)$ appartient à $Var_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Par identification des actions via le morphisme fini de $\mathbb{G}_m$ $\lambda \mapsto \lambda^n$ 1.1.2, la classe de cet objet dans $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ ne dépend pas de n :

$$[X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty \times \mathbb{G}_m, \tau_n] = [X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty \times \mathbb{G}_m, \tau_1].$$

3.4.6. Preuve du théorème 3.3. — Nous donnons ici la trame de la preuve, les preuves des lemmes seront faîtes en 3.4.7.

Démonstration. — Par la proposition 3.8 remarquons tout d'abord que

Lemme 3.15. — *Pour tout ω dans Ω, l'arc $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ noté φ appartient à $\mathscr{X}^{\delta}_{m_\Gamma(\omega),\omega}(f)$ si et seulement si le d-uplet $(P_i(0))$ appartient à $\mathbb{G}_m^d \setminus X_{\gamma(\omega)}(0)$. En ce cas, le coefficient angulaire $\mathrm{ac}\, 1/f(\varphi)$ est égal à $1/f_{\gamma(\omega)}(\underline{P_i(0)})$.*

Nous prouverons alors les deux lemmes de mesure suivant :

Lemme 3.16. — *Soit γ une face de Γ, ε dans $\mathcal{E}$, ω dans $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, et δ un entier strictement positif, la mesure de $\mathscr{X}^{\delta}_{m_\Gamma(\omega),\omega}(f)$ vaut $\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d |\omega_i|}[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0),\ p_{\gamma,\varepsilon},\ \sigma_\gamma]$.*

Lemme 3.17. — *Soit γ une face de Γ, ε dans $\mathcal{E}$, ω dans $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, δ un entier strictement positif, et n dans $\{1, ..., m_\Gamma(\omega) - 1\}$. Si $\mathscr{X}^{\delta}_{n,\omega}(f)$ est vide alors sa mesure est nulle sinon elle vaut $[X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty \times \mathbb{G}_m, \tau_1]\mathbb{L}^{-p-\sum_{i=1}^d |w_i|}$ où p est l'entier $m_\Gamma(\omega) - n$*

Dans l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}[[T]]$, nous obtenons alors la décomposition suivante

$$
\begin{aligned}
Z^{\delta}_{1/\hat{f},U}(T) &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), p_{\gamma,\varepsilon}, \sigma_\gamma\right] S^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T) \\
&+ \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \left[X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m\ , p_{\gamma,\varepsilon}, \tau_1\right] S^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T)
\end{aligned} \tag{3}
$$

où il est noté avec les notations 3.4.3

$$S^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T) := \sum_{\omega\in C^{=}_{\gamma,\varepsilon}\cap\mathbb{Z}^d} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d |w_i|} T^{m_\Gamma(\omega)}$$

et

$$S^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T) := \sum_{(n,\omega)\in C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}\cap\mathbb{Z}^{d+1}} \mathbb{L}^{-(m_\Gamma(\omega)-n)\ -\sum_{i=1}^d |w_i|} T^n$$

Grâce au lemme 1.2 nous obtenons la rationalité et la limite des sommes précédentes :

Lemme 3.18. — *La somme $S^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T)$ est rationnelle et sa limite vaut $\chi_c(C^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon})$.*

Lemme 3.19. — *La somme $S^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T)$ est rationnelle et sa limite vaut 0.*

Par application de ces deux lemmes, par additivité de la caractéristique d'Euler à support compact et par image directe nous obtenons alors l'expression suivante :

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_c(C^{\delta,=}_{\gamma}) \left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma\right].$$

Le lemme suivant conclut la preuve du théorème 3.3 :

Lemme 3.20. — *Pour toute face γ de Γ, si γ est contenue dans une face contenant 0 alors la caractéristique d'Euler $\chi_c(C^{\delta,=}_{\gamma})$ est nulle sinon elle vaut $(-1)^{d-\dim\gamma}$.*

□

3.4.7. Preuves. —

3.4.7.1. Preuve du lemme 3.16.—

Démonstration. — Soit φ un arc de la forme $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ un arc de $\mathscr{X}^{\delta}_{m\Gamma(\omega),\omega}(f)$. Rappelons que $P_i(t)$ est une série formelle avec $P_i(0)$ non nul. Cet arc correspond à l'arc $([x_{i,0}(t) : x_{i,1}(t)], [f(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1} : 1])$ avec $(x_{i,0}(t), x_{i,1}(t))$ de la forme $(t^{\omega_i}P_i(t)^{-1}, 1)$ pour $\omega_i > 0$, $(1, P_i(t)t^{-\omega_i})$ pour $\omega_i < 0$ et $(1, P_i(t))$ pour ω_i nul. On se place dans une carte affine contenant l'origine de l'arc et nous considérons $(t^{|\omega_i|}Q_i(t))$ l'arc associé, où $Q_i(t)$ est $P_i(t)^{-\varepsilon_i}$, pour tout i dans $\{1, ..., d\}$. On pose alors

$$\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega} = \{t^{|\omega_i|}Q_i(t) \big| \ Q_i(t) \in k[[t]], \ (P_i(0)) \in \mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0) \ \}$$

muni du morphisme convenable vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ et de l'action standard du groupe $\mathbb{G}_m$ sur les arcs. Pour tout entier k, $\pi_k(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega})$ est isomorphe à $\pi_k(\mathscr{X}^{\delta}_{m\Gamma(\omega),\omega}(f))$ dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$. Dans la suite on tronque les arcs à l'ordre $n' + k$ avec n' égal à $\sum_{i=1}^{d} |\omega_i|$ et k dans $\mathbb{N}$. Par conséquent, Q_i est tronqué à l'ordre $n' + k - |\omega_i|$. Par le théorème [**10**, 7.1] (que l'espace sous jacent soit lisse ou non) on obtient l'égalité

$$\mu\left(\mathscr{X}^{\delta}_{m\Gamma(\omega),\omega}(f)\right) = \mu\left(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}\right) = \lim_{k\to\infty}\left[\pi_{n'+k}\left(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}\right)\right].\mathbb{L}^{-(n'+k)d}$$

avec $\mathbb{L}$ la classe $\left[\mathbb{A}^1_k \times X_\infty \times \mathbb{G}_m \to X_\infty \times \mathbb{G}_m, \tau_1\right]$ où la flèche est la projection sur $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ et l'action τ_1 de $\mathbb{G}_m$ est $\tau_1(\lambda, (\mu, x, \nu))$ égal à $(\mu, x, \lambda\nu)$, pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$ et pour tout (μ, x, ν) dans $\mathbb{A}^1_k \times X_\infty \times \mathbb{G}_m$. L'objet $\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega})$ est une sous variété affine de $\mathbb{A}^{(n'+k+1)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|}$ dont les coordonnées sont les coefficients des Q_i, notés $a_{i,j}$, avec i appartenant à $\{1, ..., d\}$ et j à $\{0, ..., n' + k - |\omega_i|\}$. On notera a au lieu de $(a_{i,j})$. L'action usuelle de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs se traduit alors en coordonnées par $\sigma(\lambda, (a_{i,j}))$ égal à $(\lambda^{j+|\omega_i|}a_{i,j})$. Par conséquent,

$$\begin{array}{cccc} F & : & \left(\pi_{n'+k}\left(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}\right), \sigma\right) & \to & \left(\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), \sigma_\omega\right) \\ & & (t^{|\omega_i|}Q_i(t)) & \mapsto & (P_i(0)) \end{array}$$

est un morphisme dans $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ compatible avec les flèches au dessus de $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ et avec les actions σ et σ_ω : $F(\sigma(\lambda, a))$, $\sigma_\omega(\lambda, F(a))$ et $(\lambda^{-\omega_i}a_{i,0}^{-\varepsilon_i})$ sont égaux. Dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$, F est une fibration triviale de fibre $(\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m, p_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}, \sigma_\omega)$ avec $\sigma_\omega(\lambda, (a, x, \mu))$ égal à $((\lambda^{j+|\omega_i|}a_{i,j}), x, \lambda^{m\Gamma(\omega)}\mu)$ et $p_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ la projection sur $X_\infty \times \mathbb{G}_m$.

Le morphisme de trivialisation Φ de $\left(\pi_{n'+k}\left(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}\right), \sigma\right)$ vers le produit fibré

$$(\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m, p_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}, \sigma_\omega) \underset{X_\infty \times \mathbb{G}_m}{\times} (\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0) \overset{p_{\gamma,\varepsilon}}{\to} X_\infty \times \mathbb{G}_m, \sigma_\omega)$$

associe à a le quadruplet $(a, \pi_0(a), f_\gamma((a_{i,0}^{-\varepsilon_i}))^{-1}, (a_{i,0}^{-\varepsilon_i}))$ où π_0 est le morphisme de $(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}, \sigma)$ vers X_∞. Ce morphisme est un isomorphisme dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ d'inverse,

$$\Phi^{-1}(a, \underline{x}, f_\gamma(\underline{x})^{-1}, \underline{x}) = a$$

avec pour tout i, $a_{i,0}^{-\varepsilon_i}$ égal à x_i. Par conséquent, dans l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ on obtient l'égalité

$$[\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{m\Gamma(\omega),\omega}), \sigma] = [\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m, \sigma_\omega][\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), \sigma_\omega].$$

Par construction du groupe de Grothendieck $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ on dispose de l'égalité

$$\mathbb{L}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} = [\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m, \sigma_\omega].$$

En effet l'action σ_ω et l'action $\tau_{m_{\Gamma(\omega)}} : (\lambda, (a^i_j), x, \mu)) \to ((a^i_j), x, \lambda^{m_{\Gamma(\omega)}}\mu)$ relèvent la même action sur $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ donc induisent la même classe 1.1.2. Enfin $\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m$ munie de l'action $\tau_{m_{\Gamma(\omega)}}$ a la même classe que la même variété munie de l'action τ_1 car on passe d'une action à l'autre par le morphisme fini de $\mathbb{G}_m$, $\lambda \mapsto \lambda^{m_{\Gamma(\omega)}}$ 1.1.2. Ainsi dans $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$ la classe $\left[\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{m_{\Gamma(\omega)},\omega}), \sigma\right]$est égale à $\mathbb{L}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|}\left[\mathbb{G}_m^d \setminus X_\gamma(0), p_{\gamma,\varepsilon}, \sigma_\gamma\right]$ ce qui prouve le lemme 3.16. □

3.4.7.2. Preuve du lemme 3.17.—

Démonstration. — Soit φ un arc de $\mathscr{X}^\delta_{n,\omega}(f)$ égal à $(P_i(t)/t^{\omega_i})$. Rappelons que $P_i(t)$ est une série formelle avec P_i non nul. Cet arc correspond à l'arc tracé sur X noté $([x_{i,0}(t) : x_{i,1}(t)], [f(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1} : 1])$ avec $(x_{i,0}(t), x_{i,1}(t))$ de la forme $(t^{\omega_i}P_i(t)^{-1}, 1)$ pour $\omega_i > 0$, $(1, P_i(t)t^{-\omega_i})$ pour $\omega_i < 0$ et $(1, P_i(t))$ pour ω_i nul. On se place dans une carte affine contenant l'origine de l'arc et nous considérons $(t^{|\omega_i|}Q_i(t))$ l'arc associé, où $Q_i(t)$ est $P_i(t)^{-\varepsilon_i}$, pour tout i dans $\{1, ..., d\}$ et avec les notations précédentes on pose alors

$$\mathscr{A}_{n,\omega} = \left\{ t^{|\omega_i|}Q_i(t) \;\middle|\; \begin{array}{l} Q_i(t) \in k[[t]],\ (P_i(0)) \in X_\gamma(0) \\ \text{et } \mathrm{ord}_t f\,(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1} = n \end{array} \right\}$$

avec pour convention signe(0) égal à -1. On le munit du morphisme convenable vers $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ et de l'action standard du groupe $\mathbb{G}_m$ sur les arcs. Pour tout entier k, $\pi_k(\mathscr{A}_{n,\omega})$ est isomorphe à $\pi_k(\mathscr{X}^\delta_{n,\omega}(f))$ dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$. On note n' l'entier $n + \sum_{i=1}^{d}|w_i|$, on tronque les arcs au rang $n' + k$ avec k dans $\mathbb{N}$ et on dispose des égalités

$$\mu\left(\mathscr{X}^\delta_{n,\omega}(f)\right) = \mu\left(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)\right) = \lim_{k \to \infty}\left[\pi_{n'+k}\left(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)\right)\right]\mathbb{L}^{-(n'+k)d} \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}.$$

Pour tout i dans $\{1, .., d\}$, l'arc Q_i est tronqué à l'ordre $n' + k - |\omega_i|$. L'objet $\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega})$ est une sous variété affine de $\mathbb{A}^{(n'+k+1)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|}$ dont les coordonnées sont les coefficients des Q_i, notés $a_{i,j}$, avec i dans $\{1, ..., d\}$ et j dans $\{0, ..., n' + k - |\omega_i|\}$. L'action usuelle de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs se traduit alors en coordonnées par $\sigma(\lambda, (a_{i,j}))$ égal à $(\lambda^{j+|\omega_i|}a_{i,j})$.

Par le lemme 3.15, pour tout $(t^{|\omega_i|}Q_i(t))$ appartenant à $\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}(f))$, $(P_i(0))$ appartient à $X_\gamma(0)$. Par conséquent, dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$, le morphisme

$$\begin{array}{cccc} F & : & \pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)) & \to & X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m \\ & & t^{|\omega_i|}Q_i(t) & \mapsto & ((P_i(0)), ac(f(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1})) \end{array}$$

est compatible avec les flèches et les actions σ et τ_n. Comme f est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini, f_γ est lisse sur $\mathbb{G}_m^d$. Donc pour tout a dans $X_\gamma(0)$ il existe i_0 dans $\{1, .., d\}$ tel que $\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}}(a)$ est non nul, donc $\frac{\partial \tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_0}}(a, 0)$ est non nul. Montrons que dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}$, F est une fibration localement triviale de fibre $(\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|\omega_i|-p} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m, pr_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}, \sigma)$ avec comme ouverts de trivialisation les variétés $(X_\gamma(0) \cap (\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}} \neq 0)) \times \mathbb{G}_m$ et comme morphismes de trivialisation, les morphismes Φ de $\{\ \varphi \in \pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)) \;\big|\; \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}}((P_i(0))) \neq 0\ \}$ que nous notons $(\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}) \cap \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}} \neq 0, \sigma)$ vers le produit fibré

$$(\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|\omega_i|-p} \times X_\infty \times \mathbb{G}_m,\ pr_{X_\infty \times \mathbb{G}_m},\ \sigma) \underset{X_\infty \times \mathbb{G}_m}{\times} (X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m,\ p_{\gamma,\varepsilon},\ \tau_n).$$

Il associe à chaque arc tronqué $\left(t^{|\omega_i|}Q_i(t)\right)$, écrit en coordonnées $(a_{i,j})$, le quadruplet

$$(a_{i,0}^{-\varepsilon_i},\ \mathrm{ac}\,f(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1}\ ;\ (a_{i,j})_{(i,j)\in I_{i_0}}, \pi_0(a_{i,j}),\ \mathrm{ac}\,f(P_i(t)/t^{\omega_i})^{-1})$$

où π_0 est le morphisme de $(\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}),\sigma)$ vers X_∞ et I_{i_0} est l'ensemble d'indices

$$I_{i_0} := \{(i,j) \mid i \neq i_0, j \in \{1..n'+k-|w_i|\}\} \cup \{(i_0,j) \mid j \in \{p+1,...,n'+k-|w_{i_0}|\}\}.$$

Montrons que Φ est un isomorphisme : soit $\left(t^{|\omega_i|}Q_i(t)\right)$ dans $\pi_{n'+k}\left(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)\right)$. Il existe A une série formelle inversible telle que

$$\frac{1}{f(\varphi(t))} = \frac{t^{m_\Gamma(\omega)}}{\tilde{f}_\gamma((P_i(t)),t)} = A(t)t^n\ , A(0) \neq 0.$$

On note p l'entier $m_\Gamma(a)-n$. En ce cas $\tilde{f}_\gamma((P_i(t)),t)$ vaut $A^{-1}(t)t^p$ et $\tilde{f}_\gamma((P_i(t)),t)$ est égal à $t^p/A(0)\, mod\, t^{p+1}$. Rappelons que

$$\tilde{f}_\gamma(\underline{x},u) = f_{\gamma(\omega)}(\underline{x}) + \sum_{k \notin \gamma} \alpha_{\underline{k}}\, u^{m_\Gamma(\underline{\omega})-\underline{k}.\underline{\omega}}\ \underline{x}^{\underline{k}}.$$

Par le développement de Taylor on peut écrire :

$$\tilde{f}_\gamma(P(t),t) = \tilde{f}_\gamma(P(0),0) + D\tilde{f}_\gamma(P(0),0)(P(t)-P(0),t) + ... = \frac{1}{A(0)}t^p\, mod\, t^{p+1}.$$

Or par hypothèse $\tilde{f}_\gamma(P(0),0)$ et $f_\gamma(P(0))$ sont nuls, donc en notant $(x_{n+1},P_{n+1}(t))$ le couple de variables (u,t), on dispose l'égalité

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,..,i_k}\frac{\partial^k\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}}(P(0),0)\prod_{j=1}^{k}(P_{i_j}(t)-P_{i_j}(0)) = \frac{1}{A(0)}t^p\, mod\, t^{p+1}.$$

Pour tout i dans $\{1,...,n\}$, $\frac{\partial\tilde{f}_\gamma}{\partial x_i}(P(0),0)$ est égal à $\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}(P(0))$. En isolant la variable i_0 nous obtenons l'égalité

$$\frac{\partial\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_0}}(P(0),0)(P_{i_0}(t)-P_{i_0}(0)) + \sum_{k=2}^{p}\sum_{i_1,..,i_{k-1}}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_0}...\partial x_{i_{k-1}}}(P(0),0)\prod_{j=0}^{k-1}(P_{i_j}(t)-P_{i_j}(0))$$

$$= \frac{1}{\alpha(0)}t^p - \sum_{k=1}^{p}\sum_{i_1\neq i_0,..,i_k\neq i_0}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}}(P(0),0)\prod_{j=1}^{k}(P_{i_j}(t)-P_{i_j}(0))\, mod\, t^{p+1},$$

ainsi que l'inégalité sur les ordres

$$\mathrm{ord}_t\frac{\partial\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_0}}(P(0),0)(P_{i_0}(t)-P_{i_0}(0)) < \mathrm{ord}_t\left(\sum_{k=2}^{p}\sum_{i_1,..,i_{k-1}}\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\tilde{f}_\gamma}{\partial x_{i_0}...\partial x_{i_{k-1}}}(P(0),0)\prod_{j=0}^{k-1}(P_{i_j}(t)-P_{i_j}(0))\right).$$

Donc les p premiers coefficients de P_{i_0} : $a_1^{i_0},...,a_p^{i_0}$ s'obtiennent de manière unique à partir des $(a_{i,j})_{(i,j)\in I_{i_0}}$ comme solutions d'un système triangulaire dont la solution est unique car $\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}}(P(0),0) \neq 0$. Par conséquent, on obtient dans l'anneau $\mathcal{M}_{X_\infty\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ le produit

$$[\pi_{n'+k}(\mathscr{A}_{n,\omega}(f)) \cap \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_{i_0}} \neq 0,\sigma] = [X_\gamma(0)\times\mathbb{G}_m, p_{\gamma,\varepsilon},\tau_n][\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|\omega_i|-p}\times X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\omega].$$

Comme précédemment par identification des actions nous avons les égalités

$$[\mathbb{A}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|\omega_i|-p}\times X_\infty\times\mathbb{G}_m,\sigma_\omega] = \mathbb{L}^{(n'+k)d-\sum_{i=1}^{d}|w_i|-p}$$

et $[X_\gamma(0)\times\mathbb{G}_m, p_{\gamma,\varepsilon},\tau_n] = [X_\gamma(0)\times\mathbb{G}_m, p_{\gamma,\varepsilon}\times\mathbb{G}_m,\tau_1]$. Ceci prouve le lemme 3.17. $\square$

3.4.7.3. Preuve du lemme 3.18. —

Démonstration. — Fixons γ et ε, le cône $C^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}$ peut être vide, la somme $S^{\delta,=}_{\gamma,\varepsilon}(\mathbb{L},T)$ est alors nulle. Ecartons ce cas là. La preuve découle des lemmes 1.2 et 3.21.

Lemme 3.21. — *Pour un polynôme de Laurent, pour un des cônes précédents $C_{\gamma,\varepsilon}$, on considère les formes linéaires $l : \omega \mapsto (a \mid \omega)$ avec a dans γ et $\nu : \omega \mapsto \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i w_i$. La forme linéaire l est strictement positive sur l'adhérence $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}} \setminus \{0\}$ et ν est positive.*

Démonstration. — Par définition de $\sigma_{\gamma,\varepsilon}$, pour tout ω appartenant au cône $C_{\gamma,\varepsilon}$, $\nu(\omega)$ vaut $\sum_{i=1}^{d} |w_i|$. Par continuité, cette forme linéaire ne s'annule qu'en 0 sur $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}}$. Soit γ une face du type $(\gamma_{l_1} \cap ... \cap \gamma_{l_s}) \cap (\gamma_{k_1} \cap ... \cap \gamma_{k_t})$ où les γ_{l_i} sont les faces de codimension 1 contenant 0 et les γ_{k_j} sont les faces ne contenant pas 0. Pour γ_i une face de codimension 1 on note $\vec{\alpha}^{(i)}$ la normale à la face γ_i extérieure au polyèdre Γ et de plus petite norme. Par définition 3.8, $\sigma(\gamma)$ est égal à $\sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_+^* \vec{\alpha}^{(l_i)} + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}_+^* \vec{\alpha}^{(k_i)}$ et son adhérence $\overline{\sigma(\gamma)}$ est $\sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}_+ \vec{\alpha}^{(l_i)} + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}_+ \vec{\alpha}^{(k_i)}$. L'adhérence du cône $C_{\gamma,\varepsilon}$ est contenue dans $\overline{\sigma(\gamma)}$. Soit $\vec{a}$ dans γ, pour tout i dans $\{1,..,s\}$, le produit scalaire $(\vec{a} \mid \vec{\alpha}^{(l_i)})$ est nul car $\vec{a}$ appartient à γ_{l_i} qui contient 0 et la forme linéaire $(\vec{\alpha}^{(l_i)} \mid .)$ atteint son maximum sur la face γ_{l_i}, par 3.9. Par conséquent, tout ω dans $\sigma(\gamma)$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{s} \lambda_{l_i} \vec{\alpha}^{(l_i)} + \sum_{i=1}^{t} \lambda_{k_i} \vec{\alpha}^{(k_i)}$, et le produit scalaire $(a \mid \omega)$ est égal à $\sum_{i=1}^{t} \lambda_{k_i} (\vec{a} \mid \vec{\alpha}^{(k_i)})$. Or pour tout i dans $\{1,..,t\}$, le vecteur $\vec{\alpha}^{(k_i)}$ appartient à Ω donc le produit scalaire $(\vec{a} \mid \vec{\alpha}^{(k_i)})$ vaut $m_\Gamma(\vec{\alpha}^{(k_i)})$ et est donc strictement positif. Par conséquent $(a \mid \omega)$ est négatif ou nul, et en particulier nul si tous les λ_{k_i} sont nuls, auquel cas $m_\Gamma(\omega)$ est lui même nul. Or pour tout i dans $\{1,..,d\}$ les inégalités $\delta m_\Gamma(\omega) \geq \omega_i \geq -\delta m_\Gamma(\omega)$ restent vraies sur l'adhérence du cône donc ω_i est nul, pour tout i dans $\{1,..,d\}$. Par conséquent la forme linéaire l est strictement positive sur $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}} \setminus \{0\}$.

Soit γ une face du type $\gamma_{k_1} \cap ... \cap \gamma_{k_t}$ où les γ_{k_j} sont des faces de codimension 1 ne contenant pas 0. L'adhérence $\overline{\sigma(\gamma)}$ est égale à $\sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}_+ \vec{\alpha}^{(k_i)}$. L'adhérence $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}}$ du cône $C_{\gamma,\varepsilon}$ est contenue dans $\overline{\sigma(\gamma)}$. Soit $\vec{a}$ un point de la face γ et ω un élément de $\overline{\sigma(\gamma)}$ que l'on écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{t} \lambda_{k_i} \vec{\alpha}^{(k_i)}$, en ce cas le produit scalaire $(a \mid \omega)$ vaut $\sum_{i=1}^{t} \lambda_{k_i} (\vec{a} \mid \vec{\alpha}^{(k_i)})$. Pour tout i dans $\{1,..,t\}$, le vecteur $\vec{\alpha}^{(k_i)}$ appartient à Ω, donc le produit scalaire $(\vec{a} \mid \vec{\alpha}^{(k_i)})$ vaut $m_\Gamma(\vec{\alpha}^{(k_i)})$ et est donc strictement positif. Par conséquent $(a \mid \omega)$ est positif ou nul et en particulier nul si tous les λ_{k_i} sont nuls c'est à dire ω nul. La forme linéaire l est strictement positive sur $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}} \setminus \{0\}$. □

□

3.4.7.4. Preuve du lemme 3.19. —

Démonstration. — Montrons tout d'abord que pour tout $\delta > 0$, pour tout γ, ε tels que $C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}$ soit non vide, le cône $C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}$ est polyédral rationnel convexe de caractéristique d'Euler nulle. Nous pouvons supposer que pour tout i, ε_i est égal à 1, autrement dit $\omega_i > 0$. Notons C le cône polyédral rationnel convexe relativement ouvert $\{n \in \mathbb{N}^*, \omega \in \sigma_{\gamma,\varepsilon} \mid \underline{m}_\Gamma(\omega) > n\}$. Le cône $C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}$ est alors égal à $\{(n,\omega) \in C \mid \forall i,\ n\delta \geq \omega_i\}$. Notons que toutes les inégalités ne sont pas toutes trivialement vérifiées, autrement dit $C^{\delta,<}_{\gamma,\varepsilon}$ est différent de C. Ce cône est la réunion disjointe de cônes polyédraux rationnels convexes (parfois vides) de la forme

$$C_{I,\geq} := \left\{ (n,\omega) \in C \middle| \begin{array}{ll} \omega_i = \omega_j & \forall i,j \in I \\ n\delta \geq \omega_i > \omega_k & \forall i \in I, \forall k \notin I \end{array} \right\}$$

(pour toute partie I non vide de $\{1,..,d\}$) où l'inégalité n'est pas triviale. Ce cône est lui même contenu dans le cône polyédral rationnel convexe $\left\{(n,\omega) \in C \middle| \ \omega_i = \omega_j > \omega_k \quad \forall i,j \in I, \forall k \notin I \ \right\}$ noté C_I et son complémentaire est le cône $\{(n,\omega) \in C_I \mid n\delta < \omega_i, i \in I\}$ qui est un cône polyédral rationnel convexe relativement ouvert non vide et de même dimension que C_I. Ainsi par additivité de la caractéristique d'Euler à support compact, $\chi_c(C_{I,\geq})$ est nulle. En particulier par sommation, $\chi_c(C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,<})$ est nulle.

Considérons les formes linéaires $l : (n,\omega) \mapsto n$ et $\nu : (n,\omega) \mapsto (m_\Gamma(\omega) - n) \ + \sum_{i=1}^{d} |\omega_i|$. Ces deux formes linéaires sont strictement positives sur $\overline{C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,<}} \setminus \{0\}$. Si n est nul par la condition au bord $m_\Gamma(\omega) > n \geq |\omega_i| / \delta$ alors tous les ω_i sont nuls. Par conséquent par le lemme 1.2 la somme $S_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,<}(\mathbb{L},T)$ est rationnelle et sa limite vaut 0. □

3.4.7.5. Preuve du lemme 3.20. —

Démonstration. — Rappelons que $C_\gamma^{\delta,=}$ est le cône $\{\omega \in \sigma(\gamma) \mid |\omega_i| \leq m_\Gamma(\omega)\delta\}$.

Soit γ une face de Γ non contenue dans une face contenant 0. Montrons les inégalités $-m_\Gamma(\omega)\delta \leq \omega_j \leq m_\Gamma(\omega)\delta$ pour tout ω dans $\sigma(\gamma)$ et pour tout j dans $\{1,...,d\}$. Cette face est une intersection de faces γ_j de codimension 1 qui ne contiennent pas 0, par exemple γ est égal à $\gamma_1 \cap ... \cap \gamma_t$. Le cône $\sigma(\gamma)$ est alors égal à $\sum_{j=1}^{t} \mathbb{R}_*^+ \alpha^{(j)}$ où $\alpha^{(j)}$ est le vecteur normal de la face γ_j, extérieur à Γ, à coordonnées entières et de plus petite norme. Soit ω appartenant à $\sigma(\gamma)$, il existe (λ_j) dans ${\mathbb{R}_*^+}^t$ tels que ω s'écrivent $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j \alpha^{(j)}$. Pour toute face γ_j, pour tout a de la face γ_j, $(a \mid \alpha^{(j)})$ vaut $m_\Gamma\left(\alpha^{(j)}\right)$ et est donc strictement positif car γ_j ne contient pas 0. Par la proposition 3.8, $m_\Gamma(\omega)$ est égal à $(a \mid \omega)$ soit à $\sum_{j=1}^{t} \lambda_j m_\Gamma(\alpha^{(j)}) > 0$ pour un élément a de la face γ. Si pour tout i,j, δ est inférieur à $\mid \alpha_i^{(j)} \mid / m_\Gamma(\alpha^{(j)})$, alors $|\omega_i|$ est supérieur à $m_\Gamma(\omega)\delta$. Ceci donne un nombre fini de conditions sur δ qui ne dépendent que de Γ et sont vérifiées pour δ assez grand. Ainsi, pour δ suffisament grand le cône $C_\gamma^{\delta,=}$ est égal à $\sigma(\gamma)$ qui est un cône rationnel relativement ouvert de dimension $d - \dim \gamma$ et de caractéristique d'Euler $(-1)^{d-\dim\gamma}$.

Soit γ une face contenue dans une face contenant 0, on peut par exemple écrire γ sous la forme $\gamma_1 \cap ... \cap \gamma_l \cap \gamma_{l+1} \cap ... \cap \gamma_t$ où les γ_i sont des faces de codimension 1 et pour i dans $\{1,..,l\}$, 0 appartient à la face γ_i. Le cône $\sigma(\gamma)$ est égal à $\sum_{j=1}^{t} \mathbb{R}_*^+ \alpha^{(j)}$ où $\alpha^{(j)}$ est le vecteur normal de la face γ_j, extérieur à Γ, à coordonnées entières et de plus petite norme. Soit ω un élément du cône $\sigma(\gamma)$ il existe (λ_i) dans $(\mathbb{R}_+^*)^l$ et (μ_j) dans $(\mathbb{R}_+^*)^{t-l}$ tels que ω s'écrive sous la forme $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \alpha^{(j)} + \sum_{j=l+1}^{t} \mu_j \alpha^{(j)}$. Pour a appartenant à γ, $m_\Gamma(\omega)$ vaut $\sum_{j=l+1}^{t} \mu_j (\alpha^{(j)} \mid a)$. En particulier comme $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j \alpha^{(j)}$ n'est pas nul (sinon ω appartiendrait au cône $\sigma(\cap_{i=l+1}^{t} \gamma_t)$) toutes les conditions $-m_\Gamma(\omega)\delta \leq \omega_i \leq m_\Gamma(\omega)\delta$ ne sont pas trivialement vérifiées pour tout ω dans $C_\gamma^{\delta,=}$ et i dans $\{1,...,d\}$. Montrons alors que le cône $C^{\delta,=}$ est de caractéristique d'Euler nulle. Commençons par le stratifier en sous cône $C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,=}$ avec ε dans $\mathcal{E}$. Et montrons que pour tout ε le cône $C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,=}$ est de caractéristique d'Euler nulle. On peut supposer $\omega_i > 0$ pour tout i et comme en 3.19 on stratifie $C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,=}$ en sous-cônes polyédraux rationnels convexes (parfois vides) :

$$C_{I,\geq} := \left\{ \omega \in \sigma(\gamma,\varepsilon) \middle| \begin{array}{ll} \omega_i = \omega_j & \forall i,j \in I \\ m_\Gamma(\omega)\delta \geq \omega_i > \omega_k & \forall i \in I, \forall k \notin I \end{array} \right\}$$

(pour toute partie I non vide de $\{1,..,d\}$) où l'inégalité n'est pas triviale. Ce cône est lui même contenu dans le cône polyédral rationnel convexe $\{\omega \in \sigma(\gamma,\varepsilon) \big| \; \omega_i = \omega_j > \omega_k \quad \forall i,j \in I, \forall k \notin I \;\}$ noté C_I et son complémentaire est le cône $\{\omega \in C_I \mid m_\Gamma(\omega)\delta < \omega_i, i \in I\}$ qui est un cône polyédral rationnel convexe non vide relativement ouvert et de même dimension que C_I. Ainsi par additivité de la caractéristique d'Euler à support compact, $\chi_c(C_{I,\geq})$ est nulle. En particulier par sommation $\chi_c(C_{\gamma,\varepsilon}^{\delta,<})$ puis $\chi_c(C_\gamma^{\delta,<})$ sont nulles.

□

3.5. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini et du spectre à l'infini. — Soit f un polynôme de Laurent appartenant à $k[x_1,..,x_d][x_1^{-1},..,x_d^{-1}]$. Son domaine de définition est noté $\mathcal{U}$. Dans cette partie nous calculons la fibre de Milnor motivique à l'infini de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{G}_m$. Nous utilisons le résultat précédent 3.3 et l'additivité de la fibre de Milnor motivique.

Dans l'espace affine $\mathbb{A}_k^d$ égal à $Spec\, k[x_1,...,x_d]$, on note E_i l'hyperplan d'équation $x_i = 0$ et on désignera par E le diviseur $\sum_{i=1}^d E_i$. L'espace $\mathbb{A}_k^d$ est alors union disjointe des E_I^0 où pour tout partie I de $\{1,..,d\}$, E_I^0 est le constructilble $\cap_{i\in I} E_i \setminus \cup_{j\notin I} E_j$ et $E_\emptyset^0$ est le complémentaire du diviseur $\mathbb{A}_k^d \setminus E$.

Notons $\mathcal{P}(\{1,...,d\})$ l'ensemble des parties de $\{1,...d\}$. Il existe une partie $\mathcal{I}$ de $\mathcal{P}(\{1,..,d\})$ telle que $\mathcal{U}$ soit égal à l'union disjointe des E_I^0 où I appartient à $\mathcal{I}$.

Ceci stratifie $i(\mathcal{U} \setminus f^{-1}(0))$ en la réunion disjointe $\bigsqcup_{I\in\mathcal{I}} i(E_I^0 \setminus f^{-1}(0))$. Rappelons que nous travaillons avec la compactification $(X, i, \hat{f})$ définie en 3.2. Par additivité du morphisme $S_{1/\hat{f}} : \mathcal{M}_{X\setminus X_0} \to \mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ 1.5 nous obtenons les égalités

$$S_{1/\hat{f}}(i(\mathcal{U} \setminus f^{-1}(0))) = \sum_{I\in\mathcal{I}} S_{1/\hat{f}}(i(E_I^0 \setminus f^{-1}(0))) = \sum_{I\in\mathcal{I}} S_{1/\hat{f}}(E_I^0 \setminus f^{-1}(0) \xrightarrow{i} X)$$

Proposition 3.22. — *Pour tout I dans $\mathcal{I}$, $S_{1/\hat{f}}(E_I^0 \setminus f^{-1}(0) \xrightarrow{i} X)$ est égal à $S_{g_I,\infty}$ avec f_I le polynôme de Laurent de $k[x_j, x_j^{-1}, j \notin I]$ restreint au tore et égal à $f(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_d x_d)$, où α_i est nul pour i dans I et vaut 1 sinon. En particulier il ne dépend pas de la compactification.*

Démonstration. — Considérons I dans $\mathcal{I}$ et (Z, E, h) une résolution plongée du couple $(\overline{i(E_I^0 \setminus f^{-1}(0))}, i(E_I^0 \setminus f^{-1}(0)))$. Notons i_Z la composée $h^{-1} \circ i_{|E_I^0 \setminus f^{-1}(0)}$. Le morphisme h est propre et $i_Z(E_I^0 \setminus f^{-1}(0))$ est un ouvert dense de Z. Par le théorème 1.5, $S_{1/\hat{f}}(E_I^0 \setminus f^{-1}(0) \xrightarrow{i} X)$ est alors égal à $h_! S_{1/\hat{f}\circ h}(E_I^0 \xrightarrow{i_Z} Z)$. Considérons f_I, égal à $f(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_d x_d)$, où α_i est nul pour i dans I et vaut 1 sinon. Remarquons alors que $(Z, i_Z, \hat{f} \circ h)$ est une compactification de f_I, en passant à l'image directe nous obtenons le résultat voulu. □

Proposition 3.23. — *Pour tout I dans $\mathcal{I}$, le polyèdre de Newton de f_I, noté Γ_I, est l'intersection du polyèdre de Newton de f avec E_I. Le polynôme f_I est non dégénéré pour Γ_I et commode pour Γ_I si f est commode pour Γ.*

On applique donc la formule précédente 3.3 pour obtenir :

Théorème 3.24. — *Pour un polynôme de Laurent f appartenant à $k[x_1,..,x_d][x_1^{-1},..,x_d^{-1}]$, non dégénéré pour son polyèdre de Newton Γ, la fibre de Milnor motivique à l'infini vaut*

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{I\in\mathcal{I}} \sum_{\gamma\in\Gamma_I^\circ} (-1)^{d-|I|-\dim\gamma} [\mathbb{G}_{m,I}^{d-|I|} \setminus f_\gamma^{-1}(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma].$$

Si de plus f est un polynôme de Laurent commode alors $\mathcal{I}$ est vide, $\Gamma_\emptyset$ est égal à Γ et la fibre de Milnor motivique à l'infini vaut

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{\gamma\in\Gamma} (-1)^{d-\dim\gamma}[\mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0),\ f_\gamma^{-1},\ \sigma_\gamma].$$

Si f est un polynôme commode alors $\mathcal{I}$ est $\mathcal{P}(\{1,..,d\})$ et la fibre de Milnor motivique à l'infini vaut

$$\mathcal{S}_{f,\infty} = -\sum_{I\in\mathcal{I}}\sum_{\gamma\in\Gamma_I^\circ} (-1)^{d-|I|-\dim\gamma}[\mathbb{G}_{m,I}^{d-|I|} \setminus f_\gamma^{-1}(0),\ f_\gamma^{-1}\ ,\sigma_{\gamma,I}],$$

où pour I contenu dans $\mathcal{P}(\{1,..,d\})$, $\mathbb{G}_{m,I}^{d-|I|}$ est le tore de dimension $d-|I|$ contenu dans E_I, Γ_I et Γ_I° sont les intersections $\Gamma\cap E_I$ et $\Gamma^\circ\cap E_I^0$, $\sigma_{\gamma,I}$ est l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{G}_{m,I}^{d-|I|}\setminus f_\gamma^{-1}(0)$ où $\sigma_{\gamma,I}(\lambda,x)$ vaut $(\lambda^{-\omega_i}x_i)$ pour ω fixé dans le cône dual de la face γ du polyèdre Γ_I.

On obtient une expression du *spectre à l'infini* :

Théorème 3.25. — *Lorsque k est le corps des nombres complexes, pour un polynôme de Laurent f appartenant à l'anneau $\mathbb{C}[x_1,x_1^{-1}..,x_d,x_d^{-1}]$ et non dégénéré pour Γ son polyèdre de Newton, le spectre à l'infini de f vaut*

$$Sp_{f,\infty} = -\sum_{I\in\mathcal{I}}\sum_{\gamma\in\Gamma_I^\circ} (-1)^{d-|I|-\dim\gamma} Sp[f_\gamma^{-1}(1),\ \sigma_{\hat{\mu},\gamma}],$$

où $\sigma_{\hat{\mu},\gamma}$ est l'action du groupe $\hat{\mu}$ sur $f_\gamma^{-1}(1)$ où $\sigma_{\hat{\mu},\gamma}(\lambda,(\underline{x_i}))$ vaut $(\lambda^{-\omega_i}x_i)$ pour ω est un élément fixé du cône dual de la face γ du polyèdre Γ_I.

4. Fibres de Milnor motiviques complètes

Soit U une variété lisse sur k un corps de caractéristique 0 et $f: U\to\mathbb{A}_k^1$ un morphisme dominant.

4.1. Fibre de Milnor motivique complète. — Considérons $(X,i,\hat{f})$ une compactification de f. Comme en (2.1.1), pour tout a dans $\mathbb{A}^1$ nous notons par $\hat{f}-a$ la fonction définie sur X qui prolonge $f-a$.

Pour tout couple d'entiers strictement positifs n et γ, pour tout a dans $\mathbb{A}_k^1$, considérons l'espace d'arcs

$$\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f}-a) = \left\{\varphi\in\mathcal{L}(X)\setminus\mathcal{L}(F) \,\middle|\, \begin{array}{l} ord_t F.\varphi\leq n\gamma \\ ord_t(\hat{f}-a)(\varphi(t)) = n \end{array}\right\}.$$

Cet espace d'arcs est mesurable, même si la compactification est singulière, et sa mesure appartient à l'anneau de Grothendieck complété $\hat{\mathcal{M}}_{X_a\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On considère alors la *fonction zêta motivique modifiée* :

$$Z_{\hat{f}-a,U_X}^\gamma(T) = \sum_{n\geq 1}\mu(\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f}-a))T^n \in \hat{\mathcal{M}}_{X_a\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}[[T]].$$

De même qu'en 2.3, on dispose de résultats de rationalité et d'indépendance :

Théorème 4.1. — *Soit $f: U\to\mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse. Pour toute compactification $(X,i,\hat{f})$, lisse ou non, pour toute valeur a dans $\mathbb{A}_k^1$, et pour γ suffisament grand, la fonction zêta modifiée $Z_{\hat{f}-a,U_X}^\gamma(T)$ est rationnelle et sa limite ne dépend pas de γ. L'opposée de cette limite est*

$S_{\hat{f}-a}(U_X)$ *et appartient à l'anneau* $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X_a\times\mathbb{G}_m}$. *De plus, si le triplet* (Z,E,h) *est une log-résolution du couple* $(X, X_a \cup (X\setminus U_X))$ *alors* $S_{\hat{f}-a,U_X}$ *est égal à* $h_! S_{\hat{f}-a\circ h, h^{-1}(U_X)}$.

Théorème 4.2. — *Soit* $f : U \to \mathbb{A}^1_k$ *un morphisme à source lisse. Pour* (X, i_X, f_X) *et* (Y, i_Y, f_Y) *deux compactifications et pour toute valeur* a *appartenant à* $\mathbb{A}^1_k$*, après image directe on obtient l'égalité*

$$f_{Y!}\mathcal{S}_{f_Y-a,U_Y} = f_{X!}\mathcal{S}_{f_X-a,U_X} =: \mathcal{S}_{f,a} \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\{a\}\times\mathbb{G}_m}.$$

Cette valeur est indépendante de la compactification et est appelée fibre de Milnor motivique complète de f pour la valeur *a par opposition à* $\mathcal{S}_{f-a}$*, la fibre de Milnor motivique* "affine" *classique de* f *pour la valeur* a.

Démonstration. — La preuve se fait de la même manière que pour le théorème 2.4. □

Remarque 4.3. — Remarquons que pour toute compactification (X, i_X, f_X), la fibre de Milnor motivique $\mathcal{S}_{f-a}$ est égale à $i_X^{-1}(\mathcal{S}_{f_X-a,U_X})$ la restriction à l'espace affine de la fibre de Milnor motivique $\mathcal{S}_{f_X-a,U_X}$. En effet prendre une telle restriction revient à ne considérer que des arcs dont l'origine appartient à U.

4.2. Cycles évanescents motiviques à l'infini et globaux. — Par la définition des cycles évanescents motiviques 1.7 et par le théorème 4.2, nous obtenons

Corollaire 4.4. — *Soit* $f : U \to \mathbb{A}^1_k$ *un morphisme à source lisse. Pour* (X, i_X, f_X) *et* (Y, i_Y, f_Y) *deux compactifications et pour toute valeur* a *dans* $\mathbb{A}^1_k$*, on dispose de l'égalité*

$$f_{Y!}\mathcal{S}^{\Phi}_{f_Y-a,U_Y} = f_{X!}\mathcal{S}^{\Phi}_{f_X-a,U_X} =: \mathcal{S}^{\Phi}_{f,a} \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}.$$

Cette valeur est indépendante de la compactification et est appelée cycles évanescents motiviques globaux *de* f *pour la valeur* a. *De plus pour toute valeur* a *dans* $\mathbb{A}^1_k$*, on pose*

$$S^{\Phi,\infty}_{f,a} := \mathcal{S}^{\Phi}_{f,a} - f_!\mathcal{S}^{\Phi}_{f-a} \in \mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{\mathbb{G}_m}.$$

Cette valeur ne dépend pas de la compactification et est appelée cycles évanescents motiviques à l'infini *de* f *pour la valeur* a*, par opposition à* S^{Φ}_{f-a}*, les cycles évanescents motiviques* "affines" *de* f *pour la valeur* a.

Remarque 4.5. — Remarquons que les cycles évanescents motiviques à l'infini $S^{\Phi,\infty}_{f,a}$ s'expriment aussi comme la différence des cycles proches motiviques $\mathcal{S}_{f,a} - f_!\mathcal{S}_{f-a}$.

4.3. Fonctions motiviquement modérées et ensemble de bifurcation motivique. —

Définitions 4.6. — On dit que a est une *valeur motiviquement typique* si et seulement si il n'existe pas de cycles évanescents motiviques à l'infini. Autrement dit, $S^{\Phi,\infty}_{f,a}$ est nul. On dit que a est *motiviquement atypique* dans le cas contraire. On dit que f est *motiviquement modérée* si et seulement si toutes les valeurs de f sont motiviquement typiques. On appelle *ensemble de bifurcation motivique* de f, l'union des valeurs critiques de f et de l'ensemble des valeurs a telles que $S^{\Phi}_{f,a}$ est non nul. On note $\mathcal{B}^{mot}_f$cet ensemble.

Remarque 4.7. — Sabbah [36] et Parusiński [31] considèrent des morphismes cohomologiquement modérés. Un morphisme $f : U \to \mathbb{A}^1$ est *cohomologiquement modéré* s'il existe une extension $\hat{f} : X \to \mathbb{C}$ de f avec $\hat{f}$ propre, X quasi-projective, telle que pour toute valeur c, le support du faisceau des cycles évanescents de la fonction $\hat{f} - c$ à coefficients dans le faisceau $Ri_!\mathbb{Q}_U$ ne rencontre pas $X \setminus U$ (où i est l'inclusion de U dans X). En particulier la restriction $i^{-1}_{X\setminus F}\psi_{1/\hat{f}}(Ri_!\mathbb{Q}_U)$ est nulle, sa classe dans le groupe de Grothendieck $K_0(D^b_c(\hat{f}^{-1}(c) \setminus i(U)))$ est nulle. Notons que par le théorème de réalisation 1.8 si f est cohomologiquement modéré alors pour toute valeur c, cette classe est nulle. On peut ainsi dire que la propriété *motiviquement modéré* est l'analogue motivique de la propriété *cohomologiquement modéré*.

Théorème 4.8. — *Si f est un polynôme non dégénéré et commode pour son polyèdre de Newton à l'infini alors f est motiviquement modéré.*

Démonstration. — Soit f un polynôme appartenant à $k[x_1, .., x_d]$. Rappelons que Γ_- est l'enveloppe convexe de $supp(f) \cup \{0\}$. Nous supposons f commode, autrement dit, le support de f rencontre chaque axe de coordonnées. Dans ce cas là, Γ_- est égal à $\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_-$. Nous supposerons f non dégénéré pour son polyèdre de Newton. Considérons pour le moment sa restriction au tore $f : \mathbb{G}^d_m \to \mathbb{A}^1_k$. On montre que $\mathcal{S}^{\Phi,\infty}_{f,a}$ est nul pour toute valeur a dans $\mathbb{A}^1_k$. Remarquons que le polyèdre de Newton du polynôme ne dépend pas du terme initial, par conséquent pour deux valeurs distinctes a et b, $f-a$ et $f-b$ ont le même polyèdre de Newton à l'infini. Montrons alors que 0 est motiviquement typique c'est à dire $\mathcal{S}^{\Phi,\infty}_{f,0}$ est nul. Pour cela reconsidérons la compactification de la partie 3 et notons F le fermé à l'infini. On ne s'intéresse qu'a des arcs $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ dont l'origine est à l'infini, par conséquent ω appartient à $\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{Z}^d_-$ et par commodité la face $\gamma(\omega)$ appartient à Γ. Notons par ce qui précède 4.5 que $\mathcal{S}^{\Phi,\infty}_{f,0}$ est égal à $f_{X!}(\lim_{T\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathscr{X}^{\delta}_{n,\varphi(0)\in F})T^n)$ avec pour tout couple d'entiers n et δ strictement positifs

$$\mathscr{X}^{\delta}_{n,\varphi(0)\in F} := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} ord_t \hat{f}\varphi = n \\ \varphi(0) \in F \\ ord_t F.\varphi \leq n\delta \end{array} \right\} = \left\{ (P_i(t)/t^{\omega_i}) \;\middle|\; \begin{array}{l} ord_t f(P_i(t)/t^{\omega_i}) = n \\ (\omega_i) \in [-n\delta, n\delta]^d \setminus \mathbb{Z}^d_- \end{array} \right\}.$$

muni de l'action standard de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs et de la flèche vers $X_0 \times \mathbb{G}_m$ qui a un arc φ associe $(\varphi(0), \mathrm{ac}\hat{f}\varphi)$.

Nous procédons comme dans la partie 3 : nous classons tous les arcs via le polyèdre de Newton de f à l'infini et par commodité, la fonction zêta s'écrit

$$Z^{\delta,\infty}_{\hat{f},U}(T) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{(n,\omega)\in\mathcal{C}^{\delta}\cap\mathbb{Z}^{d+1}} \mu(\mathscr{X}_{n,\omega}(f))T^n$$

où $\mathcal{C}^{\delta}$ est le cône $\{n \in \mathbb{R}^*_+, \omega \in \sigma(\gamma) \mid \omega \in [-n\delta, n\delta]^d \setminus \mathbb{R}^d_-\}$ et pour ω appartenant à $\mathcal{C}^{\delta}$, l'ensemble $\mathscr{X}_{n,\omega}(f)$ est l'espace des arcs de la forme $(P_i(t)/t^{\omega_i})$ tel que l'ordre $ord_t f(P_i(t)/t^{\omega_i})$ est égal à n. Cet ensemble est muni de la flèche "origine, coefficient angulaire" vers $X_0 \times \mathbb{G}_m$ et de l'action standard de $\mathbb{G}_m$. Par 3.8, l'évaluation $f(P_i(t)/t^{\omega_i})$ est égale à $t^{-m_\Gamma(\omega)}\tilde{f}_\gamma(P_i(t), t)$, pour tout arc $(P_i(t)/t^{\omega_i})$. Or l'ordre de $f(P_i(t)/t^{\omega_i})$ vaut aussi n, par conséquent l'ordre de $\tilde{f}_\gamma(P_i(t), t)$ vaut $m_\Gamma(\omega) + n$ soit de la forme $M + n$ avec M strictement positif. Notons que si $f_\gamma(P_i(0))$ est non nul, $\tilde{f}_\gamma(P_i(t), t)$ est alors d'ordre nul, ce cas là ne se produit donc pas. Par conséquent, $(P_i(0))$ appartient à $f^{-1}_\gamma(0)$ noté $X_\gamma(0)$. Par non dégénérescence $\tilde{f}_\gamma$ est lisse sur $\mathbb{G}^d_m \times \{0\}$, donc par la preuve de 3.17, $\mathscr{X}_{n,\omega}(f)$ est de mesure $[X_\gamma(0) \times \mathbb{G}_m, p, \tau_1]\mathbb{L}^{-n-m_\Gamma(\omega)-\sum_{i=1}^{d}|w_i|}$ où p est une application convenable voir 3.17. Par la même preuve qu'en 3.19 le cône C^{δ} est de caractéristique d'Euler nulle. Donc par le lemme 1.2 (les conditions sur les formes linéaires étant directement vérifiées) les sommes $\sum_{(n,\omega)\in\mathcal{C}^\delta\cap\mathbb{Z}^{d+1}}\mu(\mathscr{X}_{n,\omega}(f))T^n$ sont rationnelles de limite nulle. De la même manière qu'en 3.5, le résultat s'étend alors par additivité à $\mathbb{A}_k^d$. $\square$

4.4. Invariant global. — Soit $(X, i, \hat{f})$ une compactification.

Définition 4.9. — Pour tout couple d'entiers n et γ strictement positifs, on définit

$$\mathscr{X}_{n,U_X}^{\gamma,global}(\hat{f}) := \{\varphi \in \mathcal{L}(X \setminus X_\infty) \big| \ ord_t(\hat{f}(\varphi(t)) - \hat{f}(\varphi(0))) = n, \ ord_t F.\varphi \le n\gamma \ \}.$$

On munit cet espace d'arc de l'application "origine, coefficient angulaire" vers $X \times \mathbb{G}_m$, qui a un arc φ associe le couple $(\varphi(0), ac(\hat{f}(\varphi(t)) - \hat{f}(\varphi(0))))$. On munit cet espace d'arcs de σ l'action usuelle du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur les arcs. Les tronqués $\pi_k\mathscr{X}_{n,U_X}^{\gamma,global}(\hat{f})$ sont des éléments de $Var_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On considère alors la *fonction zêta globale* de $\hat{f}$ sur l'ouvert U_X

$$Z_{\hat{f},U_X}^{\gamma,global}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathscr{X}_{n,U_X}^{\gamma,global}(\hat{f}))T^n \in \mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}[[T]].$$

On dispose du théorème de rationalité

Théorème 4.10. — *Soit $f : U \to \mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse et $(X, i, \hat{f})$ une compactification. On note U_X l'ouvert dense $i(U)$. Il existe un entier γ_0 tel que pour tout γ supérieur à γ_0, la série $Z_{\hat{f},U_X}^{\gamma,global}(T)$ est rationnelle et sa limite ne dépend pas de l'entier γ. L'opposé de cette limite est noté $SG_{\hat{f},U_X}$ ou $SG_{\hat{f}}$ et appartient à l'anneau $\mathcal{M}_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On note $SG_{\hat{f}}^{\Phi}$ et on appelle* cycles évanescents motiviques globaux *la quantité $(-1)^{d-1}(SG_{\hat{f}} - [\ U_X \times \mathbb{G}_m,\ id,\ \tau\ ])$ où d est la dimension de la variété X. Pour (Z, E, h) une log-résolution du couple $(X, (X\setminus U_X)\cup\hat{f}^{-1}(disc(f)))$ on dispose de l'égalité*

$$SG_{\hat{f}} = [\ U_X \setminus f^{-1}(\mathcal{V}_X) \times \mathbb{G}_m,\ id,\ \tau\ ] + \sum_{a\in\mathcal{V}_X} S_{\hat{f}-a,U_X}$$

où $\mathcal{V}_X$ est l'union du discriminant de f avec les discriminants des restrictions des composées $\hat{f} \circ h$ aux strates E_I^0. Le symbole τ désigne ici l'action du groupe multiplicatif sur le produit $U_X \setminus f^{-1}(\mathcal{V}_X) \times \mathbb{G}_m$ où pour tout (x, μ) dans $U_X \setminus f^{-1}(\mathcal{V}_X) \times \mathbb{G}_m$ et pour tout λ dans $\mathbb{G}_m$, $\tau(\lambda, (x, \mu))$ est égal à $(x, \lambda\mu)$. Enfin pour tout a dans $\mathbb{A}_k^1$, la restriction $i_{X_a}^{-1}SG_{\hat{f}}$ vaut $S_{\hat{f}-a,U_X}$.

Démonstration. — On note F le fermé $X \setminus U_X$. Soit (Z, E, h) une log-résolution du couple $(X, F \cup \hat{f}^{-1}(disc(f)))$. Remarquons là encore que si X est singulière son lieu singulier est contenu dans le fermé F et cela n'a pas d'incidence sur la preuve. Notons $(E_i)_{i\in A}$ l'ensemble des composantes irréductibles (indicées par un ensemble A). On considère la stratification usuelle du diviseur : E est la réunion disjointe $\bigsqcup_{\emptyset\ne I\subset A} E_I^0$ où pour toute partie non vide I de A, E_I^0 est égal à $\bigcap_{i\in I} E_i \setminus \bigcup_{j\notin I} E_j$. Pour toute partie I non vide de A, le discriminant de la restriction $(\hat{f} \circ h)_{|E_I^0}$ est un nombre fini de points. Lorsque la strate E_I^0 est un point, c'est à dire I est égal à d, nous considèrerons toujours le morphisme $(\hat{f} \circ h)_{|E_I^0}$ comme singulier. Notons $\mathcal{V}_X$ l'union du discriminant de f avec les discriminants des restrictions des composées $\hat{f} \circ h$ aux strates E_I^0. Pour tout entier n non nul on note $\mathscr{X}_{n,U_X,\varphi(0)\in X\setminus(F\cup\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X))}^{\gamma}$ l'ensemble des arcs φ de $\mathscr{X}_{n,U_X}^{\gamma}$ dont l'origine appartient à $X \setminus (F \cup \hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X))$. On définit de même $\mathscr{X}_{n,U_X,\varphi(0)\in F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)}^{\gamma}$. Par additivité de la mesure, on décompose la fonction zêta comme suit

$$\begin{aligned}Z^{\gamma,global}_{\hat{f},U_X}(T) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\mathscr{X}^{\gamma}_{n,U_X,\varphi(0)\in X\setminus\left(F\cup\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)\right)})T^n+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\mathscr{X}^{\gamma}_{n,U_X,\varphi(0)\in F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)})T^n\\ &+ \sum_{a\in\mathcal{V}_X} Z^{\gamma}_{\hat{f}-a,U_X}(T).\end{aligned}$$

Pour la première fonction zêta la restriction $\hat{f}_{|X\setminus\left(F\cup\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)\right)}$ est une fonction lisse, de plus il n'y a pas de conditions aux bords, par conséquent cette série génératrice est rationnelle et a pour limite la classe $[U_X\setminus(F\cup\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X))\times\mathbb{G}_m,i,\tau]$ où i est l'injection de U_X dans X

Montrons la rationalité de la deuxième fonction zêta et calculons sa limite. Rappelons que h est un morphisme propre, par application du critère de propreté h induit une bijection entre $\mathcal{L}(Y)\setminus\mathcal{L}(|E|)$ et $\mathcal{L}(X)\setminus\mathcal{L}(|\ F\cup\hat{f}^{-1}(disc(f))\ |)$. Pour tout arc φ non tracé dans $F\cup\hat{f}^{-1}(disc(f))$ on note $\tilde{\varphi}$ le relevé de φ. Notons $\mathcal{V}_X^*$ l'union $\mathcal{V}_X\cup\{\infty\}$. Pour toute valeur critique a appartenant à $\mathcal{V}_X^*$, l'image inverse $(\hat{f}\circ h)^{-1}(a)$ est un diviseur à croisements normaux contenu dans E. Par conséquent, l'image inverse $(\hat{f}\circ h)^{-1}(\mathcal{V}_X^*)$ est un diviseur à croisements normaux contenu dans E. Nous travaillons ici au dessus du complémentaire de $\mathcal{V}_X^*$, et en particulier $h^{-1}(F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X^*))$ est un diviseur à croisements normaux contenu dans E qui ne rencontre pas $(\hat{f}\circ h)^{-1}(\mathcal{V}_X^*)$. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties de A telles que E_I^0 est une strate du diviseur $h^{-1}(F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X^*))$. Pour tout élément non vide I de $\mathcal{I}$ et pour toute famille $(k_i)_{i\in I}$ d'entiers strictement positifs introduisons alors l'espace d'arcs

$$\mathscr{X}_{n,(k_i)_{i\in I}}:=\left\{\varphi\in\mathcal{L}(X)\setminus\mathcal{L}(F\cup\hat{f}^{-1}(disc(f)))\ \middle|\ \begin{array}{l} ord_t(\hat{f}(\varphi(t))-\hat{f}(\varphi(0)))=n\\ ord_tE_i\tilde{\varphi}=k_i,\ i\in I\\ ord_tE_i\tilde{\varphi}=0,\ i\notin I\end{array}\right\}.$$

Comme I appartient à $\mathcal{I}$, l'origine $\varphi(0)$ de l'arc φ n'appartient ni à X_∞ ni à $\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)$. On obtient alors la décomposition

$$\sum_{n\geq 1}\mu(\mathscr{X}^{\gamma}_{n,U_X,\varphi(0)\in F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)})T^n=\sum_{\substack{\emptyset\neq I\subset A\\ |I|\neq d}}\ \sum_{(n,\underline{k})\in C^\gamma\cap\mathbb{N}^{*|I|}}\mu\left(\mathscr{X}_{n,(k_i)_{i\in I}}\right)T^n$$

où C^γ est le cône $\{(n,k_i)\in\mathbb{R}^{*|I|+1}\big|\ \sum_{i\in I}k_iN_i(\mathcal{I}_F)\leq n\gamma\ \}$, où les coefficients $N_i(\mathcal{I}_F)$ sont définis par le diviseur $h^{-1}(F)$ égal à $\sum_{i\in A}N_i(\mathcal{I}_F)E_i$ et sont strictement positifs pour tout i appartenant à un ensemble d'indices I contenu dans $\mathcal{I}$ (car chaque strate associée E_I^0 est contenue dans le diviseur à croisements normaux $h^{-1}(F\setminus\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X^*))$).

Calculons la mesure de $\mathscr{X}_{n,(k_i)_{i\in I}}$. Pour cela on note $\mathscr{Y}_{n,(k_i)_{i\in I}}$ l'image inverse $h^{-1}(\mathscr{X}_{n,(k_i)_{i\in I}})$. On obtient alors l'égalité

$$\mathscr{Y}_{n,(k_i)_{i\in I}}=\left\{\varphi\in\mathcal{L}(Y)\setminus\mathcal{L}(E)\ \middle|\ \begin{array}{l} ord_t(\hat{f}(h(\varphi(t)))-\hat{f}(h(\varphi(0))))=n\\ ord_tE_i\varphi=k_i,\ i\in I\\ ord_tE_i\varphi=0,\ i\notin I\end{array}\right\}.$$

Comme I appartient à $\mathcal{I}$, l'image $h(\varphi(0))$ n'appartient ni à X_∞ ni $\hat{f}^{-1}(\mathcal{V}_X)$.
On note $\pi_{n\gamma}$ le morphisme de troncation des arcs à l'ordre $n\gamma$. Dans la catégorie $Var^{\mathbb{G}_m}_{X\times\mathbb{G}_m}$, pour toute partie I appartenant à $\mathcal{I}$ de cardinal strictement inférieur à d, le morphisme de $\pi_{n\gamma}(\mathscr{Y}_{n,(k_i)_{i\in I}})$ vers $E_I^0\times\mathbb{G}_m$, qui a un arc φ associe le couple $(\varphi(0),\mathrm{ac}(\hat{f}\circ h(\varphi(t))-\hat{f}\circ h(\varphi(0))))$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{A}^{n\gamma d-\sum_{i\in I}k_i-n}\times\mathbb{G}_m^{|I|}$. En effet, soit y appartenant à E_I^0 et $(y_i)_{i\in A}$ des équations locales des composantes irréductibles E_i du diviseur au voisinage

de y. Ces équations forment une suite régulière et par hypothèse $\hat{f}(h(y))$ n'appartient pas au discriminant de la restriction de $\hat{f} \circ h$ à la strate E_I^0. Par conséquent, la famille $(y_i)_{i\in I}, f \circ h$ peut être complétée en une application étale Φ définie sur un ouvert Ω de Y car Y est lisse en y et le cardinal de I est strictement inférieur à d. Ordonnons les éléments de I, et notons les $(i_k)_{k\in\{1,...,|I|\}}$. Par application du lemme [**9**, 4.2], $\mathscr{Y}_{\substack{n,(k_i)_{i\in I} \\ \tilde{\varphi}(0)\in\Omega}}$ est alors isomorphe au produit fibré

$$(\Omega \cap E_I^0) \times_{\mathbb{A}^d} \left\{ \psi \in \mathcal{L}_{n\gamma}(\mathbb{A}^d) \middle| \begin{array}{l} \psi_j(t) = a_j t^{k_{i_j}} + ... + *t^{n\gamma},\ j \in \{1, ..., |I|\} \\ \psi_{|I|+1}(t) = \psi_{|I|+1}(0) + a_{|I|+1}t^n + ... + *t^{n\gamma} \end{array} \right\}$$

où les a_i sont non nuls et les images $\Phi(y)$ et $\psi(0)$ sont égales pour deux éléments (y, ψ) du but. Celui-ci est muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ qui a $(\lambda, (y, \psi(t)))$ associe $(y, \psi(\lambda t))$ et d'une flèche vers $X \times \mathbb{G}_m$ à fibres $\mathbb{G}_m$−invariantes qui a (y, ψ) associe $ac(\psi_{|I|+1}(t) - \psi_{|I|+1}(0))$. On déduit de cela la fibration dans la catégorie $Var_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Par conséquent la mesure de $\mathscr{Y}_{n,(k_i)_{i\in I}}$ vaut $\left[E_I^0 \times \mathbb{G}_m, id, \tau\right] \mathbb{L}^{-\sum_{i\in I} k_i - n}$ dans l'anneau $\mathcal{M}_{Y\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ et par application de la formule de changement de variables de Denef et Loeser [**10**, 3.3], la mesure $\mu(\mathscr{X}_{n,(k_i)_{i\in I}})$ vaut $\left[E_I^0 \times \mathbb{G}_m,\ id,\ \tau\right] \mathbb{L}^{-\sum_{i\in I} \nu_i k_i - n}$ où les ν_i sont définis par l'égalité $Jac(h) = \sum_{i\in A}(\nu_i - 1)E_i$.

Enfin nous sommes amenés à montrer la rationalité de la série $\sum_{(n,\underline{k})\in C^\gamma\cap\mathbb{N}^{*|I|+1}} \mathbb{L}^{-\sum_{i\in I} k_i - n} T^n$. L'ensemble d'indices I est contenu dans $\mathcal{I}$ donc $N_i(\mathcal{I}_F)$ est strictement positif. Le complémentaire du cône C^γ polyédral rationnel convexe dans $\mathbb{R}^{*|I|+1}$ est défini par l'inégalité $\sum_{i\in I} k_i N_i(\mathcal{I}_F) > n\gamma$. Il est donc relativement ouvert et de caractéristique d'Euler à support compact égale à $(-1)^{d+1}$. Par additivité de la caractéristique d'Euler, le cône C^γ est de caractéristique d'Euler nulle. La forme linéaire l qui associe n à chaque couple $(n, \underline{k})$ est strictement positive sur $\overline{C^\gamma} \setminus \{0\}$. En effet les coefficients $N_i(\mathcal{I}_F)$ sont strictement positifs donc par prolongement de l'inégalité définissant le cône, par passage à la limite, la nullité de n entraîne la nullité des k_i. La forme linéaire qui associe $-\sum_{i\in I} \nu_i k_i - n$ à tout couple $(n, \underline{k})$ du cône C^γ est elle aussi strictement positive sur $\overline{C^\gamma} \setminus \{0\}$. Par application du lemme 1.2, la série $\sum_{(n,\underline{k})\in C^\gamma\cap\mathbb{N}^{*|I|+1}} \mathbb{L}^{-\sum_{i\in I} k_i - n} T^n$ est rationnelle et de limite nulle.

Enfin pour toute valeur a dans $\mathcal{V}_X$ la fonction zêta $Z_{\hat{f}-a,U_X}^\gamma(T)$ est rationnelle. En effet, le lieu singulier de X est contenu dans le fermé à l'infini F, on peut donc agir comme en 2.3. L'existence de γ_0 vient de ce théorème de rationalité. Pour toute valeur a dans $\mathbb{A}_k^1$, on déduit des définitions l'égalité $i_{X_a}^{-1} SG_{\hat{f}} = S_{\hat{f}-a,U_X}$. □

On dispose alors du théorème d'indépendance suivant

Théorème 4.11. — *Soit $f : U \to \mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse. Pour deux compactifications (X, i_X, f_X) et (Y, i_Y, f_Y), les objets $f_{X!}SG_{f_X}$ et $f_{Y!}SG_{f_Y}$ sont égaux dans $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. On note SG_f cet invariant et on l'appelle* invariant global *de f. Ceci induit l'égalité entre $f_{X!}SG_{f_X}^\Phi$ et $f_{Y!}SG_{f_Y}^\Phi$. On note SG_f^Φ cet invariant et on l'appelle* cycles évanescents motiviques globaux *de f. Enfin en notant i_a l'injection du singleton $\{a\}$ dans la droite $\mathbb{A}_k^1$ pour tout a dans $\mathbb{A}_k^1$, les objets $i_a^{-1}SG_f$ et $\mathcal{S}_{f,a}$ sont égaux tout comme $i_a^{-1}SG_f^\Phi$ et $\mathcal{S}_{f,a}^\Phi$.*

Démonstration. — Soit (X, i_X, f_X) et (Y, i_Y, f_Y) deux compactifications. Les immersions i_X et i_Y induisent chacune un isomorphisme entre $X \setminus (F_X \cup f_X^{-1}(discf))$ et $Y \setminus (F_Y \cup f_Y^{-1}(discf))$ avec l'ouvert $U \setminus f^{-1}(disc(f))$. On applique alors le théorème de coiffage 2.8 à $(X, F_X \cup f_X^{-1}(discf))$ et $(Y, F_Y \cup f_Y^{-1}(discf))$. On obtient ainsi un quadruplet (Z, E, h_X, h_Y) tel que (Z, E, h_X) est une log-résolution de $(X, F_X \cup f_X^{-1}(discf))$ et (Z, E, h_Y) est une log-résolution de $(Y, F_Y \cup f_Y^{-1}(discf))$.

En particulier $f_X \circ h_X$ est égal à $f_Y \circ h_Y$. Par le théorème précédent $f_{X!}SG_{f_X}$ est égal à $f_{Y!}SG_{f_Y}$. L'égalité évanescente en découle. $\square$

Définition 4.12. — Soit $f : U \to \mathbb{A}^1$ une fonction à source lisse. On appelle *discriminant universel* et on note $\mathcal{D}_f$, l'ensemble formé du discriminant de f et des valeurs a telles que pour toute compactification $(X, i, \hat{f})$, pour toute log-résolution (Z, E, h) du couple $(X, F \cup \hat{f}^{-1}(disc(f)))$, il existe une strate E_I^0 du diviseur pour laquelle a appartient au discriminant de $(\hat{f} \circ h)_{|E_I^0}$.

Théorème 4.13. — *Soit $f : U \to \mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse. L'ensemble de bifurcation motivique est contenu dans le discriminant universel $\mathcal{D}_f$. De plus on dispose de l'égalité*

$$SG_f^\Phi = \sum_{a \in B_f^{mot}} \mathcal{S}_{f,a}^\Phi \in \mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$$

Les cycles évanescents motiviques globaux sont supportés par l'ensemble de bifurcation motivique.

Démonstration. — Notons que $\mathcal{D}_f$ est l'intersection $\bigcap_{(X,h_X)} \mathcal{V}_X$. Cette intersection est faite sur l'ensemble des compactifications $(X, i, \hat{f})$ de f et sur l'ensemble des log-résolutions de $(X, F \cup \hat{f}^{-1}(disc(f)))$; avec $\mathcal{V}_X$ l'union du discriminant de f avec les discriminants des restrictions des composées $\hat{f} \circ h$ aux strates E_I^0. Par indépendance des compactifications et des log-résolutions et par conditions de supports, les cycles évanescents motiviques globaux SG_f^Φ se décomposent dans $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ sous la forme $\sum_{a \in \mathcal{D}_f \cap B_f^{mot}} \mathcal{S}_{f,a}^\Phi$. En effet, pour deux compactifications (X, i_X, f_X) et (Y, i_Y, f_Y), deux log-résolutions (X', E_X') et (Y', E_Y') des couples $(X, F_X \cup f_X^{-1}(disc(f)))$ et $(Y, F_Y \cup f_Y^{-1}(disc(f)))$ le théorème d'indépendance montre que SG_f^Φ, $f_{X!} \sum_{a \in \mathcal{V}_X} \mathcal{S}_{f_X - a, U_X}^\Phi$ et $f_{Y!} \sum_{a \in \mathcal{V}_Y} \mathcal{S}_{f_Y - a, U_y}^\Phi$ sont égaux dans $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Notons alors que pour toute valeur a appartenant à l'union $\mathcal{V}_X \cup \mathcal{V}_Y$ mais pas à l'intersection $\mathcal{V}_X \cap \mathcal{V}_Y$ les objets $i_a^{-1} SG_f^\Phi$, $f_{X!}\mathcal{S}_{f_X - a, U_X}^\Phi$ et $f_{Y!}\mathcal{S}_{f_Y - a, U_Y}^\Phi$ sont égaux dans l'anneau $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Or a n'appartient pas à l'intersection $\mathcal{V}_X \cap \mathcal{V}_Y$, par conséquent l'un des membres de l'égalité est nulle.

Si une valeur a n'appartient pas à $\tilde{B}$ alors il existe une compactification $(X, i, \hat{f})$ et une log-résolution (Z, E, h) de $(X, F \cup \hat{f}^{-1}(disc(f)))$ telles que pour toutes strates E_I^0, a n'est pas une valeur critique de la resctriction $(f_X \circ h)_{|E_I^0}$. En ce cas a n'appartient pas à $\mathcal{V}_X$ et par ce qui précède $f_{X!}\mathcal{S}_{f_X - a, U_X}^\Phi$ est nul. Or $f_{X!}\mathcal{S}_{f_X - a, U_X}^\Phi$ est égal à $\mathcal{S}_{f,a}^\Phi$ donc $\mathcal{S}_{f,a}^\Phi$ est nul. Le discriminant de f est contenu dans $\mathcal{D}_f$. Par conséquent, pour toute valeur a n'appartenant pas à $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{S}_{f-a}^\Phi$ est nul, $\mathcal{S}_{f,a}^{\Phi,\infty}$ est alors nul et a n'est pas motiviquement atypique. Ainsi, l'ensemble de bifurcation motivique est contenu dans $\mathcal{D}_f$. $\square$

Théorème 4.14. — *Soit $f : U \to \mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse. Si f est motiviquement modéré alors l'ensemble de bifurcation motivique est égal au discriminant de f.*

Démonstration. — En effet, si f est motiviquement modéré, les cycles évanescents motiviques de f sont alors supportés par l'ouvert lisse U. Or dans l'ouvert lisse U il n'y a existence de cycles évanescents motiviques que là où f n'est pas lisse. Par conséquent si f est motiviquement modéré l'ensemble de bifurcation motivique contient et est contenu dans le discriminant de f, il lui est donc égal. $\square$

On obtient alors directement le théorème

Théorème 4.15. — *Soit $f : U \to \mathbb{A}_k^1$ un morphisme à source lisse. Si f est motiviquement modéré alors*

$$SG_f^\Phi = \sum_{a \in disc(f)} p_!(\mathcal{S}_{f-a}^\Phi).$$

Si f est à singularités isolées et motiviquement modéré alors

$$SG_f^\Phi = \sum_{a \in disc(f)} \sum_{x \in Sing(f^{-1}(a))} (\mathcal{S}_{f-a}^\Phi)_x.$$

Remarque 4.16. — Les formules obtenues dans cette partie sont des analogues motiviques de la formule d'Iversen [**21**], on pourra consulter à ce propos [**13**, 6.2.5].

Remarque 4.17. — Kouchnirenko [**22**], puis Broughton [**4**], [**5**] ont montré que l'ensemble de bifurcation d'un polynôme f, commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini est le discriminant de f. Dans ce cas là l'ensemble de bifurcation motivique et l'ensemble de bifurcation sont égaux.

4.5. Cas d'un polynôme homogène. —

Proposition 4.18. — *Soit f un polynôme homogène en d variables. L'ensemble de bifurcation motivique $\mathcal{B}_f^{mot}$ est réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. — On peut considérer la compactification $(X, i, \hat{f})$ de f dans $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$

$$X = \left\{ [x_0 : ... : x_d], [\alpha : \beta] \mid \alpha f(x_1, ..., x_d) = \beta x_0^{deg(f)} \right\}$$

avec i l'injection $(x_1, ..., x_d) \mapsto ([1 : x_1 : ... : x_d], [1 : f(x_1, ..., x_d)])$ et $\hat{f}$ la projection de X sur $\mathbb{P}^1$. Par homogénéité de f et la relation d'Euler, 0 est l'unique valeur critique de f, et si une valeur a non nulle est motiviquement atypique alors par homogénéité toutes les valeurs sont motiviquement atypiques. Or l'ensemble de bifurcation motivique est un ensemble fini ce qui entraîne une contradiction. ☐

Dans le cas homogène nous pouvons relier la fibre de Milnor motivique complète en 0 et la fibre de Milnor motivique à l'infini comme suit :

Définition 4.19. — Notons *inv* l'opération sur $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ qui a une classe $[A, p, \sigma]$ associe la classe $[A, inv \circ p, \sigma]$ induite par l'inversion sur $\mathbb{G}_m$ notée encore *inv* qui à x associe x^{-1}.

Théorème 4.20. — *Pour f un polynôme homogène $\mathcal{S}_{f,0}$ et $inv(\mathcal{S}_{f,\infty})$ sont égaux dans $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$.*

Démonstration. — Nous calculons la fibre de Milnor motivique à l'infini du polynôme homogène f et sa fibre de Milnor motivique complète au dessus de la valeur 0, avec la compactification $(X, i, \hat{f})$ précédente. Pour tout couple d'entiers (γ, n) strictement positifs on considére

$$\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f}, 0) = \left\{ [\underline{x_i(t)}], [\alpha(t) : \beta(t)] \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha(t) f(\underline{x_j(t)}) = \beta(t) x_0(t)^{deg(f)} \\ ord_t \beta(t)/\alpha(t) = n \\ ord_t x_0(t) \leq n\gamma \end{array} \right\}$$

On munit cet espace d'arcs de l'action usuelle de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs, $\sigma(\lambda,\varphi)$ égal à $\varphi(\lambda t)$ et de l'application "origine, coefficient angulaire". Pour tout k, les tronqués $\pi_k \mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},0)$ sont des objets de la catégorie $Var_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Pour tout couple d'entiers (γ,n) strictement positifs on considère

$$\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1)}(\hat{f},\infty) = \left\{ [\underline{x_i(t)}],[\alpha(t):\beta(t)] \,\middle|\, \begin{array}{c} \alpha(t)f(\underline{x_j(t)}) = \beta(t)x_0(t)^{deg(f)} \\ ord_t\alpha(t)/\beta(t) = n(2deg(f)-1) \\ ord_t x_0(t) \leq n(\gamma+2) \end{array} \right\}$$

On munit cet espace d'arcs de l'action usuelle de $\mathbb{G}_m$ sur les arcs, $\sigma(\lambda,\varphi)$ égal à $\varphi(\lambda t)$ et de l'application "originie, coefficient angulaire". Pour tout k, ses tronqués sont des objets de la catégorie $Var_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$. Notons que pour tout polynôme f, $2deg(f)-1$ est un entier strictement positif. Pour tout arc $([\underline{x_i(t)}],[\alpha(t):\beta(t)])$ appartenant à $\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},0)$, $\beta(0)$ est nul, $\alpha(0)$ est non nul et l'arc $\beta(t)/\alpha(t)$ est égal à $f((x_j(t)/x_0(t)))$. De même pour tout arc $([\underline{x_i(t)}],[\alpha(t):\beta(t)])$ appartenant à $\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1)}(\hat{f},\infty)$, l'origine $\alpha(0)$ est nulle, $\beta(0)$ est non nulle et l'arc $\alpha(t)/\beta(t)$ est égal à $f((x_j(t)/x_0(t)))^{-1}$.

Remarque 4.21. — Rappelons que la fonction zêta modifiée de f en 0 par rapport à l'ouvert U_X, notée $Z^\gamma_{f,0,U_X}(T)$, est la série génératrice $\sum_{n\geq 1}\mu(\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},0))T^n$. Cette série est rationnelle et converge quand T tend vers l'infini vers $-S_{\hat{f},U_X}$. Considérons la série génératrice $\sum_{n\geq 1}\mu(\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1)}(\hat{f},\infty))T^{n(2deg(f)-1)}$, elle est légèrement différente de la série $Z^\gamma_{f,\infty,U_X}(T)$ égale à $\sum_{n\geq 1}\mu(\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},\infty))T^n$ mais la preuve de (3.8) **[19]** montre que ces deux séries sont rationnelles et convergent vers la même limite $-S_{\hat{f},\infty}$. L'argument clé étant que les cônes utilisés ont la même caractéristique d'Euler.

Lemme 4.22. — *Pour tout couple d'entiers (γ,n) strictement positifs,*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},0) & \to & inv(\mathscr{X}^\gamma_{2n(deg(f)-1)}(\hat{f},\infty)) \\ & ([\underline{x_i(t)}],[x_0(t)^{deg(f)}:f(\underline{x_j(t)})]) & \mapsto & ([t^{2n}x_0(t):\underline{x_j(t)}],[(t^{2n}x_0(t))^{deg(f)}:f(\underline{x_i(t)})]) \end{array}$$

est un isomorphisme dans la catégorie $Var_{X\times\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$

Démonstration. — Par homogénéité de f, on vérifie que Φ est bien définie et inversible, d'inverse

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & inv(\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1),U_X}(\hat{f},\infty)) & \to & \mathscr{X}^\gamma_{n,U_X}(\hat{f},0) \\ & ([\underline{x_i(t)}],[x_0(t)^{deg(f)}:f(\underline{x_i(t)})]) & \mapsto & ([x_0(t):\underline{t^{2n}x_i(t)}],[(x_0(t))^{deg(f)}:f(\underline{t^{2n}x_i(t)})]) \end{array}$$

Rappelons que $[\underline{t^{2n}x_i(t)}]=[\underline{x_i}]$. Pour tout arc φ, $(inv\circ p_{\mathbb{G}_m})\Phi(\varphi)$ est bien égal à $p_{\mathbb{G}_m}(\varphi)$ car le coefficient angulaire ac $f\left((x_i(t)/x_0(t))\right)$ est égal à $(\mathrm{ac}(f(\frac{x_i(t)}{t^n x_0(t)})^{-1}))^{-1}$. On vérifie directement la compatibilité de Φ avec l'action σ : pour tout scalaire non nul λ, pour tout arc φ, $p_{\mathbb{G}_m}(\sigma(\lambda,\varphi))$ est égal à $(inv\circ p_{\mathbb{G}_m}\circ\Phi)(\sigma(\lambda,\varphi))$. $\square$

Par conséquent, pour tout couple (n,γ) d'entiers strictement positifs, on obtient dans l'anneau $\mathcal{M}^{\mathbb{G}_m}_{X\times\mathbb{G}_m}$, l'égalité des mesures $\mu(\mathscr{X}_n^\gamma(\hat{f},0))$ et $\mu(inv(\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1)}(\hat{f},\infty)))$. D'où l'expression de la fonction zêta $Z^\gamma_{f,0,U_X}(T^{2deg(f)-1})$ et $\sum_{n\geq 1}\mu(inv(\mathscr{X}^\gamma_{n(2deg(f)-1),U_X}(\hat{f},\infty)))T^{n(2deg(f)-1)}$. Par la remarque 4.21 et l'égalité des limites $\lim_{T\to\infty}Z^\gamma_{f,0,U_X}(T)$ et $\lim_{T\to\infty}Z^\gamma_{f,0,U_X}(T^{2deg(f)-1})$ en passant à l'image directe on obtient l'égalité des fibres de Milnor motiviques cherchée. $\square$

Références

[1] Franziska Bittner. On motivic zeta functions and the motivic nearby fiber. *Math. Z.*, 249(1) :63–83, 2005.

[2] Thomas Brélivet. Variance of the spectral numbers and Newton polygons. *Bull. Sci. Math.*, 126(4) :332–342, 2002.

[3] Thomas Brélivet. Sur les paires spectrales de polynômes à deux variables. In *Singularités Franco-Japonaises*, volume 10 of *Sémin. Congr.*, pages 39–59. Soc. Math. France, Paris, 2005.

[4] S. A. Broughton. On the topology of polynomial hypersurfaces. In *Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 167–178. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[5] S. A. Broughton. Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces. *Invent. Math.*, 92(2) :217–241, 1988.

[6] Pierrette Cassou-Noguès and Alexandru Dimca. Topology of complex polynomials via polar curves. *Kodai Math. J.*, 22(1) :131–139, 1999.

[7] Brian Conrad. Deligne's notes on Nagata compactifications. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 22(3) :205–257, 2007.

[8] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (44) :5–77, 1974.

[9] Jan Denef and François Loeser. Motivic Igusa zeta functions. *J. Algebraic Geom.*, 7(3) :505–537, 1998.

[10] Jan Denef and François Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1) :201–232, 1999.

[11] Jan Denef and François Loeser. Geometry on arc spaces of algebraic varieties. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 327–348. Birkhäuser, Basel, 2001.

[12] Alexandru Dimca. Monodromy and Hodge theory of regular functions. In *New developments in singularity theory (Cambridge, 2000)*, volume 21 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 257–278. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[13] Alexandru Dimca. *Sheaves in topology*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[14] R. García López and A. Némethi. On the monodromy at infinity of a polynomial map. *Compositio Math.*, 100(2) :205–231, 1996.

[15] R. García López and A. Némethi. Hodge numbers attached to a polynomial map. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(5) :1547–1579, 1999.

[16] R. García López and A. Némethi. On the monodromy at infinity of a polynomial map. II. *Compositio Math.*, 115(1) :1–20, 1999.

[17] Gil Guibert. Espaces d'arcs et invariants d'Alexander. *Comment. Math. Helv.*, 77(4) :783–820, 2002.

[18] Gil Guibert, François Loeser, and Michel Merle. Nearby cycles and composition with a nondegenerate polynomial. *Int. Math. Res. Not.*, (31) :1873–1888, 2005.

[19] Gil Guibert, François Loeser, and Michel Merle. Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink. *Duke Math. J.*, 132(3) :409–457, 2006.

[20] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2)*, 79 :205–326, 1964.

[21] Birger Iversen. Critical points of an algebraic function. *Invent. Math.*, 12 :210–224, 1971.

[22] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1) :1–31, 1976.

[23] François Loeser. Seattle lectures on motivic integration. In *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, volume 80 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 745–784. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[24] Eduard Looijenga. Motivic measures. *Astérisque*, (276) :267–297, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[25] Yutaka Matsui and Kiyoshi Takeuchi. Monodromy at infinity of polynomial map and mixed hodge modules. *arXiv :0912.5144v5.*

[26] Yutaka Matsui and Kiyoshi Takeuchi. Monodromy zeta functions at infinity, newton polyhedra and constructible sheaves. *arXiv :0809.3149v7.*

[27] A. Némethi and C. Sabbah. Semicontinuity of the spectrum at infinity. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 69 :25–35, 1999.

[28] András Némethi and Alexandru Zaharia. On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(4) :681–689, 1990.

[29] András Némethi and Alexandru Zaharia. Milnor fibration at infinity. *Indag. Math. (N.S.)*, 3(3) :323–335, 1992.

[30] Adam Parusiński. On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity. *Compositio Math.*, 97(3) :369–384, 1995.

[31] Adam Parusiński. A note on singularities at infinity of complex polynomials. In *Symplectic singularities and geometry of gauge fields (Warsaw, 1995)*, volume 39 of *Banach Center Publ.*, pages 131–141. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997.

[32] Chris A. M. Peters and Joseph H. M. Steenbrink. *Mixed Hodge structures*, volume 52 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[33] Frédéric Pham. Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method. In *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 319–333. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

[34] Michel Raibaut. Fibre de Milnor motivique à l'infini. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(7-8) :419–422, 2010.

[35] Claude Sabbah. Monodromy at infinity and Fourier transform. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 33(4) :643–685, 1997.

[36] Claude Sabbah. Hypergeometric periods for a tame polynomial. *Port. Math. (N.S.)*, 63(2) :173–226, 2006.

[37] Claude Sabbah. Monodromy at infinity and Fourier transform. II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(3) :803–835, 2006.

[38] Morihiko Saito. Mixed Hodge modules. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 26(2) :221–333, 1990.

[39] Dirk Siersma and Mihai Tibăr. Singularities at infinity and their vanishing cycles. *Duke Math. J.*, 80(3) :771–783, 1995.

[40] Joseph Steenbrink and Steven Zucker. Variation of mixed Hodge structure. I. *Invent. Math.*, 80(3) :489–542, 1985.

[41] Mihai Tibăr. Asymptotic equisingularity and topology of complex hypersurfaces. *Internat. Math. Res. Notices*, (18) :979–990, 1998.

[42] Mihai Tibăr. *Polynomials and vanishing cycles*, volume 170 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[43] A. N. Varčenko. Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 36 :957–1019, 1972.

[44] Jean-Louis Verdier. Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. *Invent. Math.*, 36 :295–312, 1976.

[45] Hà Huy Vui and Lê Dũng Tráng. Sur la topologie des polynômes complexes. *Acta Math. Vietnam.*, 9(1) :21–32 (1985), 1984.

[46] Alexandru Zaharia. On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary. II. *Kodai Math. J.*, 19(2) :218–233, 1996.

29 novembre 2010

Michel Raibaut, Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2, France, , University catholic of Leuven, Department of Mathematics, Celestijnenlaan 200 B,B-3001 Leuven (Heverlee), Belgium, • *E-mail :* `raibaut@unice.fr`